

GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Sequências
Matrizes
Determinantes
Sistemas

4



GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Sequências
Matrizes

Determinantes
Sistemas

4

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

8ª edição | São Paulo – 2013

Coordenadora de editoração eletrônica: Sílvia Regina E. Almeida

Diagramação gráfica: Robson Caldeira Alves
Impressão e acabamento:
Atual Editora

Copyright desta edição:

SARAIVA S.A. Livros Editores, São Paulo, 2013.

Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros

05413-010 — São Paulo — SP

Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268

SAC: 0800-0117875

www.editorasaraiva.com.br

Todos os direitos reservados.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson, 1939-

Fundamentos de matemática elementar, 4 : sequências, matrizes, determinantes e sistemas / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan. – 8. ed. – São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1748-8 (aluno)

ISBN 978-85-357-1749-5 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) – Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) – Testes I. Hazzan, Samuel, 1946-. II. Título. III. Título: Sequências, matrizes, determinantes e sistemas.

13-02580

CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática: Ensino médio 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 4

Gerente editorial: Lauri Cericato

Editor: José Luiz Carvalho da Cruz

Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos/Juracy Vespucci/Guilherme Reghin Gaspar/Livio A. D'Ottaviantonio

Auxiliares de serviços editoriais: Daniella Haidar Pacifico/Margarete Aparecida de Lima/Rafael Rabaçalho Ramos/Vanderlei Aparecido Orso

Digitação e cotejo de originais: Guilherme Reghin Gaspar/Elillyane Kaori Kamimura

Pesquisa iconográfica: Cristina Akisino (coord.)/Enio Rodrigo Lopes

Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/Rhennan Santos/Felipe Toledo/Eduardo Sigrist/Maura Loria/Aline Araújo/Elza Gasparotto/Luciana Azevedo/Patricia Cordeiro

Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa

Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan

Projeto gráfico: Carlos Magno

Capa: Homem de Melo & Tróia Desing

Imagem de Capa: tiridifilm/Getty Images

Ilustrações: Conceitograf/Mario Yoshida

Diagramação: Ulhoa Cintra

Assessoria de arte: Maria Paula Santo Siqueira

Encarregada de produção e arte: Grace Alves

Coordenadora de editoração eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacau Alves

Impressão e acabamento:

731.306.008.002



**Editora
Saraiva**

SAC

0800-0117875

De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30

www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 4, Sequências/Matrizes/Determinantes/Sistemas, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos a sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas por meio da Editora.

Agradecemos à professora Irene Torrano Filisetti a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores

Sumário

CAPÍTULO II — Progressão aritmética	1
CAPÍTULO III — Progressão geométrica	14
CAPÍTULO IV — Matrizes	42
CAPÍTULO V — Determinantes	54
CAPÍTULO VI — Sistemas lineares	78

CAPÍTULO II — Progressão aritmética

8. $(x - 1)^3 + x^3 + (x + 1)^3 = (x - 1 + x + x + 1)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1) \\ \text{ou} \\ x = 1 \Rightarrow (0, 1, 2) \\ \text{ou} \\ x = 2 \Rightarrow (1, 2, 3) \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 18 \Rightarrow x = 6 \quad (1) \\ \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+r} = \frac{23}{30} \Rightarrow \frac{3x^2 - r^2}{x(x^2 - r^2)} = \frac{23}{30} \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$\frac{108 - r^2}{6(36 - r^2)} = \frac{23}{30} \Rightarrow r = \pm 4$$

Para $x = 6$ e $r = -4 \Rightarrow (10, 6, 2)$.

Para $x = 6$ e $r = 4 \Rightarrow (2, 6, 10)$.

10.
$$\begin{cases} (x-r) \cdot x \cdot (x+r) = (x-r+x+x+r)^2 \\ x-r+x = x+r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - r^2 = 9x \\ x = 2r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \\ \text{ou} \\ r = 6 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow (6, 12, 18) \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \\ (x-r)^2 + x^2 + (x+r)^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \quad (1) \\ 3x^2 + 2r^2 = 11 \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem $r = \pm 2$.

Para $x = 1$ e $r = -2$, temos $(3, 1, -1)$.

Para $x = 1$ e $r = 2$, temos $(-1, 1, 3)$.

$$13. \quad \begin{cases} (x-3y) + (x-y) + (x+y) + (x+3y) = -6 \\ (x-3y)(x+3y) = -54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 6 \\ x^2 - 9y^2 = -54 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ e } y = \pm \frac{5}{2} \Rightarrow \text{termos: } -9, -4, 1, 6.$$

$$14. \quad \begin{cases} (x-3y)(x+y) = 45 \\ (x-y)(x+y) = 77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9y^2 = 45 \\ x^2 - y^2 = 77 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 2 \text{ e } x = \pm 9$$

$y = -2$ rejeitado porque a P.A. deve ser crescente.

Para $x = 9$ e $y = 2$, vem: $(3, 7, 11, 15)$.

Para $x = -9$ e $y = 2$, vem: $(-15, -11, -7, -3)$.

$$15. \quad \begin{cases} (x-3y) + (x-y) + (x+y) + (x+3y) = 22 \\ (x-3y)^2 + (x-y)^2 + (x+y)^2 + (x+3y)^2 = 166 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ 2x^2 + 10y^2 = 83 \end{cases} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}$$

$$\text{Para } x = \frac{11}{2} \text{ e } y = \frac{3}{2} \Rightarrow (1, 4, 7, 10).$$

$$\text{Para } x = \frac{11}{2} \text{ e } y = -\frac{3}{2} \Rightarrow (10, 7, 4, 1).$$

20. Em toda P.A., cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor.

$$\text{Assim: P.A. } (a, b, c) \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow c = 2b - a.$$

$$21. \quad 3x = \frac{2x+x^2}{2} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

Então, $(0, 0, 0)$ rejeitada porque os termos devem ser distintos.

Assim: $(8, 12, 16)$.

$$22. \quad 2x = \frac{x+1+x^2-5}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -1$$

$x = -1$ rejeitado porque $2x$ é lado de um triângulo.
Portanto, temos: (5, 8, 11) e, então, perímetro igual a 24.

$$23. \quad \text{lado} = x, \text{ diagonal} = \sqrt{2} x, \text{ área} = x^2 \Rightarrow (x, \sqrt{2} x, x^2).$$

$$\text{Então: } \sqrt{2} x = \frac{x+x^2}{2} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2\sqrt{2} - 1.$$

$x = 0$ rejeitado porque é lado do quadrado

$$\text{Então: } x = 2\sqrt{2} - 1.$$

$$25. \quad \text{Por hipótese, } \frac{1}{y+z} - \frac{1}{x+y} = r \Rightarrow x - z = r(x+y)(y+z)$$

$$\text{e } \frac{1}{z+x} - \frac{1}{y+z} = r \Rightarrow r = \frac{y-x}{(x+z)(y+z)}$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } x^2 - z^2 &= (x-z)(x+z) = r(x+y)(y+z)(x+z) = \\ &= \frac{y-x}{(x+z)(y+z)} \cdot (x+y)(y+z)(x+z) = (y-x)(x+y) = y^2 - x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. \quad &\text{Por hipótese, } b - a = c - b = r. \\ &\text{Então: } b^2(a+c) - a^2(b+c) = ab^2 + b^2c - a^2b - a^2c = \\ &= ab(b-a) + c(b^2 - a^2) = ab(b-a) + c(b-a)(b+a) = \\ &= ab(c-b) + c(c-b)(b+a) = \\ &= abc - ab^2 + c^2b + ac^2 - b^2c - abc = \\ &= ac^2 + bc^2 - ab^2 - b^2c = \\ &= c^2(a+b) - b^2(a+c) \end{aligned}$$

$$27. \quad \text{Por hipótese, } b - a = c - b \quad (1) \quad \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \quad (2).$$

$$\text{De (2) vem } \frac{b-c}{bc} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \quad (3).$$

Utilizando (1) em (3), vem:

$$\frac{a-b}{bc} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \text{ e daí } \frac{a}{bc} - \frac{1}{c} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c}$$

$$\text{então, } \frac{a}{bc} = \frac{1}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ad = \frac{a+c}{2} \cdot c \Rightarrow 2ad = c(a+c)$$

28. Fazendo $\alpha = x - 3y$, $\beta = x - y$, $\gamma = x + y$ e $\delta = x + 3y$, temos:

$$(\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) = 4x(6y - 2x) + 4x(-6y - 2x) = \\ = 4x(-4x) = -16x^2$$

$$2(\alpha\delta - 9\beta\gamma) = 2(x^2 - 9y^2 - 9x^2 - 9y^2) = -16x^2$$

$$\text{então: } (\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) = 2(\alpha\delta - 9\beta\gamma).$$

34. $a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 + 2 = 24 \Rightarrow a_1 = 22$
 $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 60 = 22 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 20 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ vigésimo termo ou a_{20} .

$$38. \begin{cases} a_{12} + a_{21} = 302 \\ a_{23} + a_{46} = 446 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 31r = 302 \\ 2a_1 + 67r = 446 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 89 \text{ e } r = 4$$

P.A.(89, 93, 97, ...).

$$39. \begin{array}{ccc} (14, 15, \dots, 191, 192) \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ a_1 \quad \quad a_n \end{array}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 191 = 15 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 89$$

40. $a_m + a_n = a_p + a_q \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_1 + (m - 1)r + a_1 + (n - 1)r = a_1 + (p - 1)r + a_1 + (q - 1)r \Rightarrow$
 $\Rightarrow (m - 1)r + (n - 1)r = (p - 1)r + (q - 1)r \Rightarrow$
 $\Rightarrow m - 1 + n - 1 = p - 1 + q - 1 \Rightarrow m + n = p + q.$

42. P.A.₁(5, 8, 11, ...)

$$\left. \begin{array}{l} n = 100 \\ r = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{100} = 5 + 99 \cdot 3 = 302$$

Então, P.A.₁(5, 8, 11, ..., 302).

P.A.₂{3, 7, 11, ...}

$$\left. \begin{array}{l} n = 100 \\ r = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{100} = 3 + 99 \cdot 4 = 399$$

Então, P.A.₂(3, 7, 11, ..., 399).

Como queremos os termos comuns às duas progressões, então $a_n \leq 302$.

Observamos que o primeiro termo comum é $a_1 = 11$ e o segundo termo comum é $a_2 = 23 \Rightarrow r = 12$.

Então: $a_1 + (n - 1)r \leq 302$

$11 + (n - 1) \cdot 12 \leq 302 \Rightarrow n \leq 25,25 \Rightarrow n = 25$.

43. $a_p = a + (p - 1)r \Rightarrow a = a_p - (p - 1)r$

Como $0 \leq a \leq 10$ e $a_p = 35$, vem:

$$0 \leq 35 - (p - 1) \cdot 12 \leq 10 \Rightarrow 2,9 \leq p \leq 3,6 \Rightarrow p = 3.$$

Então: $a_3 = a + 2r \Rightarrow 35 = a + 2 \cdot 12 \Rightarrow a = 9$.

44. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (1, 3, 5, \dots, a_n)$

$$(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n)) = (f(1), f(3), f(5), \dots, f(a_n)) = (4, 10, 16, \dots, f(a_n))$$

Sendo $f(x) = ax + b$
$$\begin{cases} f(1) = a + b = 4 \\ f(3) = 3a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 1$$

Portanto: $f(2) = a \cdot 2 + b \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow f(2) = 7$.

45. Por hipótese $a_p - a_{p-1} = r$ e $a_{p-1} - a_{p-2} = r$ para todo $\frac{p}{2}$ natural, $3 \leq p \leq n$.

Então:

$$a_p^2 - a_{p-1}^2 = (a_p - a_{p-1})(a_p + a_{p-1}) = r(a_p + a_{p-1})$$

$$a_{p-1}^2 - a_{p-2}^2 = (a_{p-1} - a_{p-2})(a_{p-1} + a_{p-2}) = r(a_{p-1} + a_{p-2})$$

e daí vem:

$$(a_p^2 - a_{p-1}^2) - (a_{p-1}^2 - a_{p-2}^2) = r(a_p - a_{p-2}) = r \cdot 2r = 2r^2 \text{ (constante)}.$$

46. Por hipótese:

$$x = a_m = a_1 + (m - 1)r$$

$$y = a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$z = a_p = a_1 + (p - 1)r$$

então:

$$(n - p)x + (p - m)y + (m - n)z =$$

$$= (n - p)[a_1 + (m - 1)r] + (p - m)[a_1 + (n - 1)r] + (m - n)[a_1 + (p - 1)r] =$$

$$= a_1(n - p + p - m + m - n) + r[(n - p)(m - 1) + (p - m)(n - 1) + (m - n)(p - 1)] = a_1 \cdot 0 + r \cdot 0 = 0.$$

- 47.** Demonstração pelo princípio da indução finita.
Para $n = 3$, temos:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{a_3 + a_1}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2a_2}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2}{a_1 a_3} = \frac{3-1}{a_1 a_3}$$

Suponhamos a tese válida para p termos iniciais, $p \geq 3$, ou seja:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{p-1} a_p} = \frac{p-1}{a_1 a_p}$$

então, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{p-1} a_p} + \frac{1}{a_p a_{p+1}} &= \frac{p-1}{a_1 a_p} + \frac{1}{a_p a_{p+1}} = \\ &= \frac{(p-1)a_{p+1} + a_1}{a_1 a_p a_{p+1}} = \frac{(p-1)(a_p + r) + a_1}{a_1 a_p a_{p+1}} = \frac{(p-1)a_p + a_1 + (p-1)r}{a_1 a_p a_{p+1}} = \\ &= \frac{p \cdot a_p}{a_1 a_p a_{p+1}} = \frac{p}{a_1 a_{p+1}} = \frac{(p+1)-1}{a_1 a_{p+1}} \end{aligned}$$

e a tese está verificada para $p + 1$ termos iniciais.
Em consequência, a tese vale para todo n natural.

- 49.** $(12, _, _, \dots, _, _, 34)$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 34 \\ r = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 34 = 12 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow n = 45 \quad (\text{incluindo os extremos})$$

Então, devem ser interpolados 43 termos.

- 52.** Múltiplos de 2 $\rightarrow (100, 102, \dots, 1\,000)$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 100 \\ a_n = 1000 \\ r = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1000 = 100 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow n = 451$$

Múltiplos de 3 $\Rightarrow (102, \dots, 999)$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 102 \\ a_m = 999 \\ r = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 999 = 102 + (m-1) \cdot 3 \Rightarrow m = 300$$

Múltiplos de 2 e 3, isto é, múltiplos de 6 $\rightarrow$ (102, ..., 996)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 102 \\ a_p = 996 \\ r = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 996 = 102 + (p - 1) \cdot 6 \Rightarrow n = 150$$

Assim, múltiplos de 2 ou 3 de 100 a 1 000 são no total:

$$n + m - p = 451 + 300 - 150 = 601.$$

- 53.** Números de dois ou três algarismos: (10, 11, 12, ..., 998, 999)
 $n = 999 - 10 + 1 = 990$

Números de dois ou três algarismos, divisíveis por 7: (14, ..., 994)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 14 \\ a_p = 994 \\ r = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 994 = 14 + (p - 1)r \Rightarrow p = 141$$

Então, não são divisíveis por 7: $n - p = 849$ números.

- 54.** Total de inteiros de 1 000 a 10 000, $n = 9 001$
 Números divisíveis por 5: (1 000, ..., 10 000)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 000 \\ a_m = 10 000 \\ r = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 10 000 = 1 000 + (m - 1) \cdot 5 \Rightarrow m = 1 801$$

Números divisíveis por 7: (1 001, ..., 9 996)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 001 \\ a_p = 9 996 \\ r = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 996 = 1 001 + (p - 1) \cdot 7 \Rightarrow p = 1 286$$

Números divisíveis por 5 e 7: (1 015, ..., 9 975)

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 015 \\ a_q = 9 975 \\ r = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 975 = 1 015 + (q - 1) \cdot 35 \Rightarrow q = 257$$

Então, não são divisíveis nem por 5 nem por 7:

$$n - [m + p - q] = 9 001 - [1 801 + 1 286 - 257] = 6 171.$$

56. $\underbrace{(1, _, _, \dots, _, n^2)}_n$

A P.A. tem $n + 2$ termos.

$$n^2 = 1 + (n + 2 - 1)r \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n + 1} = r \Rightarrow r = n - 1$$

62.
$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1-n}{n} \\ a_2 = \frac{2-n}{n} \end{array} \right\} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = \frac{2-n-(1-n)}{n} \Rightarrow r = \frac{1}{n}$$

$$\text{Então: } a_n = \frac{1-n}{n} + (n-1) \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow a_n = 0.$$

$$\text{Portanto, } S_n = \frac{\left(\frac{1-n}{n} + 0\right) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{1-n}{2}.$$

67.
$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 10(a_1 + a_{20}) = -15 \Rightarrow a_1 + a_{20} = -\frac{3}{2}$$

Como a_6 e a_{15} são termos equidistantes dos extremos, então:

$$a_6 + a_{15} = a_1 + a_{20} \Rightarrow a_6 + a_{15} = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

68. $r = 0,08a_1$
 $a_{11} = 36 \Rightarrow a_1 + 10 \cdot 0,08a_1 = 36 \Rightarrow a_1 = 20$
 Portanto, $r = 1,6$ e $a_{26} = 60$.

$$\text{Assim, } S_{26} = \frac{(20 + 60) \cdot 26}{2} \Rightarrow S_{26} = 1040.$$

69.
$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 50 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 10$$

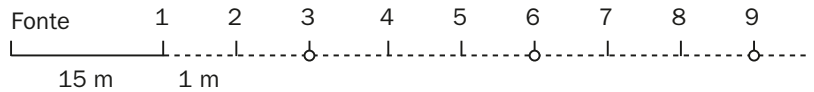
$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 50 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 5$$

$$\begin{cases} a_1 + a_{10} = 10 \\ a_1 + a_{20} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 9r = 10 \\ 2a_1 + 19r = 5 \end{cases} \Rightarrow r = -\frac{1}{2} \text{ e } a_1 = \frac{29}{4}$$

$$\text{Então: } a_{30} = \frac{29}{4} + 29\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a_{30} = -\frac{29}{4}$$

$$\text{Portanto, } S_{30} = \frac{\left(\frac{29}{4} - \frac{29}{4}\right) \cdot 30}{2} = 0.$$

71.



$$1^{\text{a}} \text{ caminhada (ida e volta)} = 2(15 + 1 + 1) = 2 \cdot 17 = 34.$$

$$2^{\text{a}} \text{ caminhada (ida e volta)} = 2(17 + 1 + 1 + 1) = 2 \cdot 20 = 40.$$

Assim, à P.A.₁ (3, 6, 9, ..., 60), que é o número de roseiras regadas a cada caminhada, corresponde a P.A.₂ (34, 40, ...), que representa o percurso percorrido.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Considerando} \\ \text{a P.A.}_1, \text{ vem:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = 60 \\ r = 3 \end{array} \Rightarrow 60 = 3 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow n = 20$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Considerando} \\ \text{a P.A.}_2, \text{ vem:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = 34 \\ a_n = 20 \\ r = 6 \end{array} \Rightarrow a_{20} = 34 + 19 \cdot 6 \Rightarrow a_{20} = 148$$

$$\text{Assim: } S_{20} = \frac{34 + 148}{2} \cdot 20 \Rightarrow S_{20} = 1820 \text{ m.}$$

73.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -5 \\ r = 4 \\ a_n = -5 + (n-1) \cdot 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 1590 = \left(\frac{-5 - 5 + 4n - 4}{2} \right) \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 7n - 1590 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 30 \\ \text{ou} \\ n = -\frac{53}{2} \text{ (rejeitado)} \end{array} \right.$$

$$\text{Então, } S_n = 1590 \text{ se } n = 30.$$

$$74. \quad \left. \begin{array}{l} a_1 = 13 \\ a_2 = \frac{45}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = -\frac{7}{4}$$

$$a_n = 13 + (n - 1) \left(-\frac{7}{4} \right) \Rightarrow a_n = \frac{59}{4} - \frac{7}{4}n$$

$$S_n = \left(\frac{13 + \frac{59}{4} - \frac{7}{4}n}{2} \right) \cdot n < 0 \Rightarrow -7n^2 + 111n < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 111n < 0 \Rightarrow \begin{cases} n < 0 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ n > \frac{111}{7} \Rightarrow n = 16 \text{ (valor mínimo)} \end{cases}$$

$$76. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(a_1 + a_{59}) \cdot 59}{2} = 12 \\ \frac{(a_2 + a_{60}) \cdot 59}{2} = 130 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 58r = \frac{24}{59} \\ 2a_1 + 60r = \frac{260}{59} \end{cases} \Rightarrow r = 2 \text{ e } a_1 = -\frac{3410}{59}$$

$$78. \quad (4, 7, 10, 13, \dots, 517)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 4 \\ r = 3 \\ a_n = 517 \end{array} \right\} \Rightarrow 517 = 4 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 172$$

Então, 517 é termo de ordem par e cada P.A. extraída dessa tem 86 termos:

P.A._i (4, 10, 16, ..., 514) e P.A._p (7, 13, ..., 517)

$$\left. \begin{aligned} S_{86i} &= \frac{(4 + 514) \cdot 86}{2} \\ S_{86p} &= \frac{(7 + 517) \cdot 86}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} S_{86i} &= \frac{518}{524} = \frac{259}{262} \end{aligned}$$

- 81.** $(14, 21, 28, \dots, a_n)$, em que $a_n \leq 9999$
 Então, $14 + (n - 1) \cdot 7 \leq 9999 \Rightarrow n \leq 1427 \Rightarrow n = 1427$
 Assim, $a_{1427} = 14 + 1426 \cdot 7 = 9996$.

$$S_{1427} = \frac{(14 + 9996) \cdot 1427}{2} \Rightarrow S_{1427} = 7\,142\,135$$

- 84.**
$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1 + 3 \Rightarrow f(1) = 5 \\ f(25) &= 2 \cdot 25 + 3 \Rightarrow f(25) = 53 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{25} = \frac{(5 + 53) \cdot 25}{2} = 725$$

 Portanto $f(1) + f(2) + \dots + f(25) = 725$

- 85.**
$$\sum_{x=5}^{n+5} 4(x-3) = An^2 + Bn + C$$

Para $n = 1$, vem:

$$\begin{aligned} \sum_{x=5}^6 4(x-3) &= A + B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) &= A + B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow A + B + C &= 20 \quad (1) \end{aligned}$$

Para $n = 2$, vem:

$$\begin{aligned} \sum_{x=5}^7 4(x-3) &= 4A + 2B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) + 4(7-3) &= 4A + 2B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 4A + 2B + C &= 36 \quad (2) \end{aligned}$$

Para $n = 3$, vem:

$$\begin{aligned} \sum_{x=5}^8 4(x-3) &= 9A + 3B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) + 4(7-3) + 4(8-3) &= 9A + 3B + C \Rightarrow \\ \Rightarrow 9A + 3B + C &= 56 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (1) A + B + C = 20 \\ (2) 4A + 2B + C = 36 \\ (3) 9A + 3B + C = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 20 \\ 2B + 3C = 44 \\ 6B + 8C = 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 20 \\ 2B + 3C = 44 \\ C = 8 \end{cases}$$

$$\text{Então, } A + B = 20 - C \Rightarrow 20 - 8 = 12.$$

86.

$$S_m = S_n \Rightarrow \frac{[2a_1 + (m-1)r]m}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1m + (m-1)rm = 2a_1n + (n-1)rn \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1(m-n) = [n(n-1) - m(m-1)]r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1(m-n) = (n-m)(n+m-1)r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 = -(n+m-1)r \quad (1)$$

Sendo $a_{m+n} = a_1 + (m+n-1)r$, então:

$$S_{m+n} = \frac{[a_1 + a_1 + (m+n-1)r](m+n)}{2}$$

$$S_{m+n} = \frac{[2a_1 + (m+n-1)r](m+n)}{2} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$S_{m+n} = 0.$$

87.

$(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, \dots, a_{2n}, a_{2n+1})$ é uma P.A. com número ímpar de termos. Então, o termo médio é média aritmética entre os extremos e essa relação também é válida entre os índices desses termos.

Assim:

$$\frac{2_n + 1 + 1}{2} = \frac{2_n + 2}{2} = n + 1 \quad (\text{índice do termo médio}).$$

Temos, ainda:

$$a_{2n+1} = a_1 + 2nr \text{ e } a_{2n} = a_1 + (2n-1)r.$$

$$S_i = \frac{(a_1 + a_1 + 2nr)(2n+1)}{2} = (a_1 + nr)(2n+1)$$

$$S_p = \frac{[a_1 + r + a_1 + (2n-1)r]2n}{2} = 2(a_1 + nr) \cdot n$$

$$\begin{aligned} S_i - S_p &= (a_1 + nr)(2n + 1) - 2(a_1 + nr)n = \\ &= (a_1 + nr)(2n + 1 - 2n) = a_1 + nr = a_{n+1} \text{ (termo médio)} \end{aligned}$$

88. $(a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_n, \dots)$
 $a_p + a_n = a_1 + (p-1)r + a_1 + (n-1)r =$
 $= a_1 + [a_1 + (p+n-2)r] \in \text{P.A.} \Rightarrow a_1 = Kr, K \in \mathbb{Z}$

89. $a_{\frac{n}{3}} = 4 \Rightarrow a_{\frac{n}{3}} = a_1 + \left(\frac{n}{3} - 1\right) \cdot 1 = 4 \Rightarrow a_1 + \left(\frac{n-3}{3}\right) = 4$

Sabendo que $n = 3K$, então $a_1 + \frac{3(K-1)}{3} = 4 \Rightarrow a_1 = 5 - K$.

Então: $a_n = a_{3K} = 5 - K + 3K - 1 = 4 + 2K$.

Portanto, $S_{3K} = \frac{(5-K+4+2K)3K}{2} = 33 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K^2 + 9K - 22 = 0 \Rightarrow \begin{cases} K = -11 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ K = 2 \Rightarrow a_1 = 3 \text{ e } n = 6 \end{cases}$$

Assim: P.A. (3, 4, 5, 6, 7, 8).

91. $\frac{(a_1 + a_n)n}{2} = (n+1) \cdot \frac{a_n}{2}$

$$\begin{aligned} a_1 \cdot n + a_n \cdot n &= n \cdot a_n + a_n \Rightarrow a_1 n = a_n \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 n &= a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_1(n-1) = (n-1)r \Rightarrow a_1 = r \end{aligned}$$

CAPÍTULO III — Progressão geométrica

97. $(1 + x, 13 + x, 49 + x)$

$$\frac{13+x}{1+x} = \frac{49+x}{13+x} \Rightarrow (13+x)^2 = (49+x)(1+x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x - 120 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, $(6, 18, 54) \Rightarrow q = 3$.

99. $\frac{\sin(x+\pi)}{\sin x} = q \Rightarrow q = \frac{-\sin x}{\sin x} = -1$

$$\frac{\sin(x+2\pi)}{\sin(x+\pi)} = q \Rightarrow q = \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

A progressão geométrica é alternante, com $q = -1$.

101. P.G.: $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$

$$\text{condições: } \begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = \frac{21}{8} & (1) \\ \frac{x^2}{q^2} + x^2 + x^2q^2 = \frac{189}{64} & (2) \end{cases}$$

Fazendo a diferença entre o quadrado de (1) e (2), temos:

$$\frac{2x^2}{q} + 2x^2q + 2x^2 = \left(\frac{21}{8}\right)^2 - \frac{189}{64} \Rightarrow 2x\left(\frac{x}{q} + x + xq\right) = \frac{63}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x \cdot \frac{21}{8} = \frac{63}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Substituindo em (1), resulta:

$$\frac{3}{4q} + \frac{3}{4} + \frac{3q}{4} = \frac{21}{8} \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \text{ ou } q = 2$$

Os números procurados são: $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}$ e $\frac{3}{2}$.

$$102. \quad \begin{cases} a_1 + a_2 = 12 \\ a_3 + a_4 = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + xq = 12 \\ xq^2 + xq^3 = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + q) = 12 & (1) \\ xq^2(1 + q) = 300 & (2) \end{cases}$$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$$q^2 = 25 \Rightarrow q = \pm 5$$

$$\text{Para } q = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10, 50, 250).$$

$$\text{Para } q = -5 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 15, -75, 375).$$

$$103. \quad \begin{cases} \frac{x}{q^2} + \frac{x}{q} + x + xq + xq^2 = \frac{121}{3} & (1) \\ \frac{x}{q^2} \cdot \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq \cdot xq^2 = 243 & (2) \end{cases}$$

$$\text{De (2) vem } x^5 = 243 \Rightarrow x = 3.$$

$$\text{Substituindo em (1), resulta: } \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 + q + q^2 = \frac{121}{9}.$$

E daí:

$$\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + \left(q + \frac{1}{q}\right) + 1 = \frac{121}{9}.$$

$$\text{Fazendo } q + \frac{1}{q} = y \text{ e } q^2 + \frac{1}{q^2} - 2, \text{ resulta:}$$

$$(y^2 - 2) + y + 1 = \frac{121}{9} \Rightarrow y^2 + y - \frac{130}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y = -\frac{13}{3} \text{ ou } y = \frac{10}{3}\right) \Rightarrow \left(q = \frac{-13 \pm \sqrt{133}}{6} \text{ ou } q = 3 \text{ ou } q = \frac{1}{3}\right).$$

Como q é racional, os números são: $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27$.

$$\begin{aligned}
 104. \quad & \begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 182 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 546 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + xq^2 + xq^4 = 182 \\ xq + xq^3 + xq^5 = 546 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + q^2 + q^4) = 182 & (1) \\ xq(1 + q^2 + q^4) = 546 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$$q = \frac{546}{182} = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 6, 18, 54, 162, 486).$$

$$\begin{aligned}
 105. \quad & \begin{cases} b^2 = ac & (1) \\ 2c = b + d \Rightarrow d = 2c - b & (2) \\ a + d = 32 \Rightarrow a = 32 - d & (3) \\ b + c = 24 \Rightarrow c = 24 - b & (4) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Substituindo (4) em (2), vem: $d = 48 - 3b$ (5).

Substituindo (5) em (3), vem: $a = -16 + 3b$ (6).

Substituindo (4) e (6) em 1, temos:

$$b^2 = (-16 + 3b)(24 - b) \Rightarrow b^2 - 22b + 96 = 0 \Rightarrow b = 16 \text{ ou } b = 6$$

$$\text{Para } b = 16, \text{ vem: } a = 32, c = 8 \text{ e } d = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{P.G.}(32, 16, 8) \\ \text{P.A.}(16, 8, 0) \end{cases}$$

$$\text{Para } b = 6, \text{ vem: } a = 2, c = 18 \text{ e } d = 30 \Rightarrow \begin{cases} \text{P.G.}(2, 6, 18) \\ \text{P.A.}(6, 18, 30) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 106. \quad & x - r + x + x + r = 36 \Rightarrow x = 12 \\
 & \text{P.A. } (12 - r, 12, 12 + r) \Rightarrow (12 - r, 12, 18 + r) \text{ é P.G.} \\
 & \text{Então: } 12^2 = (12 - r)(18 + r) \Rightarrow r^2 + 6r - 72 = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow r = 6 \text{ ou } r = -12 \text{ (rejeitado porque a P.A. é crescente)} \\
 & \text{Então, os números são } 6, 12 \text{ e } 18.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 107. \quad & \text{Como } x, y \text{ e } z \text{ estão em P.G., nessa ordem, então } y^2 = xz. \text{ Assim, vem:} \\
 & (x + y + z)(x - y + z) = x^2 + 2xz - y^2 + z^2 = x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2 = \\
 & = x^2 + y^2 + z^2.
 \end{aligned}$$

$$108. \quad a, b, c \text{ e } d \text{ estão em P.G.} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ ad = bc \end{cases}$$

Assim, temos:

$$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 = ac - 2ad + bd.$$

$$109. \quad (a, b, c) \text{ é P.A.} \Rightarrow 2b = a + c$$

$$(a, b, c) \text{ é P.G.} \Rightarrow b^2 = ac$$

Então, vem:

$$(2b)^2 = (a + c)^2 \Rightarrow 4b^2 = a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow 4ac = a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c.$$

$$\text{Como } 2b = a + c, \text{ então } 2b = 2a \Rightarrow b = a.$$

$$110. \quad (a, b, c, d) \text{ é P.G.} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ bc = ad \end{cases}$$

$$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = \\ = b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2 = \\ = a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 - 2ac - 2bc - 2bd = \\ = a^2 + 2ac + 2bd + d^2 - 2ac - 2bc - 2bd = \\ = (a - d)^2$$

$$111. \quad \text{medidas dos lados: } x, xq, xq^2 \\ \text{condição: } (xq^2)^2 = x^2 + (xq)^2 \text{ (teorema de Pitágoras)} \\ \text{Então, temos:}$$

$$x^2q^4 = x^2 + x^2q^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

- 112.** medidas dos lados: x , xq e xq^2
 condições: (1) $q > 1$ (P.G. crescente)
 (2) $xq^2 < x + xq$ (condição para existência do triângulo)

$$\text{De (2) vem: } q^2 < 1 + q \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Fazendo a interseção, temos:

$$1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- 113.** medidas dos lados: $\frac{x}{q}$, x , xq

$$\text{condições: (1) } \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 1728$$

$$(2) xq < x + \frac{x}{q}$$

De (1) vem $x = 12$, que, substituído em (2), dá:

$$q^2 - q - 12 < 0 \Rightarrow -3 < q < 4.$$

Como q deve ser positivo e divisor de 12, então temos:

$$q = 1 \Rightarrow \text{lados medindo } 12, 12 \text{ e } 12$$

$$q = 2 \Rightarrow \text{lados medindo } 6, 12 \text{ e } 24$$

$$q = 3 \Rightarrow \text{lados medindo } 4, 12 \text{ e } 36$$

$$\text{e, ainda, } q = 1,5 \Rightarrow \text{lados medindo } 8, 12, 18.$$

114. $\text{sen}^2 x = \frac{\text{sen } x}{2} \cdot \text{tg } x \Rightarrow 2 \text{sen}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \text{sen}^2 x \cos x - \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$118. \quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{6}}$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = 1$$

$$120. \quad a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow \frac{1}{2} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$$

$$123. \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$100 < 3^{n-1} < 1000 \Rightarrow 3^4 < 100 < 3^{n-1} < 1000 < 3^7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 < n-1 < 7 \Rightarrow 5 < n < 8 \Rightarrow n \in \{6, 7\}$$

Então existem 2 termos: a_6 e a_7 .

$$124. \quad a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2 \cdot 3^9 \Rightarrow (a_{10})^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{8}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$$

A igualdade dada é falsa.

$$125. \quad \text{taxa de crescimento} = 3\% \text{ a.a.} \Rightarrow q = 1,03$$

$$a_4 = 120\,000 \cdot (1,03)^3 = 131\,127$$

$$126. \quad \text{taxa de crescimento} = 10\% \text{ a.a.} \Rightarrow q = 1,1$$

Ao final de 4 anos, temos: $a_5 = 100\,000 \cdot (1,1)^4 = 146\,410$.

$$127. \quad \text{Vamos representar por } a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \text{ o volume de álcool existente na mistura após cada uma das operações realizadas. Temos:}$$

$$a_1 = 12 - 3 = 9$$

$$a_2 = 9 - \frac{9}{12} \cdot 3 = \frac{27}{4}, \text{ pois a quantidade de álcool nos 3 } \ell \text{ retirados}$$

$$\text{é de } \frac{9}{12} \text{ do total.})$$

$$a_3 = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} \cdot 3 = \frac{81}{16}, \text{ pois a quantidade de álcool nos 3 } \ell$$

$$\text{retirados é de } \frac{\frac{27}{4}}{12} \text{ do total.}$$

Pode-se notar, então, que $a_1, \dots, a_5$ é uma P.G. com $a_1 = 9$ e $q = \frac{3}{4}$.

$$\text{Daí vem: } a_5 = a_1 \cdot q^4 = 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{729}{256} \cong 2,85 \ell.$$

129. $a_1q + a_1q^3 + a_1q^5 = 10 \quad (1)$

$$a_1q^2 + a_1q^4 + a_1q^6 = 30 \quad (2)$$

Dividindo (2) por (1), temos:

$$\frac{q^2(a_1 + a_1q^2 + a_1q^4)}{q(a_1 + a_1q^2 + a_1q^4)} = 3 \Rightarrow q = 3.$$

Substituindo em (1), temos:

$$3a_1 + 27a_1 + 243a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = \frac{10}{273}.$$

131. $a = a_p$

$$b = a_q = a_p \cdot Q^{q-p}$$

$$c = a_r = a_p \cdot Q^{r-p}$$

$$\text{Então: } a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = \frac{a^q}{a^r} \cdot \frac{b^r}{b^p} \cdot \frac{c^p}{c^q} =$$

$$= \frac{a_p^q}{a_p^r} \cdot \frac{a_p^r \cdot Q^{(q-p)r}}{a_p^p \cdot Q^{(q-p)p}} \cdot \frac{a_p^p \cdot Q^{(r-p)p}}{a_p^q \cdot Q^{(r-p)q}} =$$

$$= Q^{(q-p)(r-p)} \cdot Q^{(r-p)(p-q)} = Q^{(r-p)(q-p+p-q)} = Q^0 = 1$$

132. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = q$, então:

$$\frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n-1}}} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{q}$$

provando que $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots\right)$ também é P.G.

133. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = q$, então:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = q^2, \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} = q^2, \text{ etc.}$$

provando que $(a_1, a_3, a_5, \dots)$ também é P.G.

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} = q^2, \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_6}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_4} = q^2, \text{ etc.}$$

provando que $(a_2, a_4, a_6, \dots)$ também é P.G.

135. P.G.: $(3, _, _, -24, _, _)$

$$\left. \begin{array}{l} a_4 = -24 \\ a_1 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -24 = 3 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = -8 \Rightarrow q = -2$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 3 \cdot (-2)^5 = -96$$

136. $a_1 = 78\,125$, $a_n = 128$ e $q = \frac{2}{5}$, então:

$$128 = 78\,125 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{2^7}{5^7} \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

então devem ser interpolados 6 meios geométricos.

137. $a_1 = 1\,458$, $a_n = 2$ e $q < \frac{1}{3}$, então:

$$2 = 1\,458 \cdot q^{n-1} \Rightarrow q = \left(\frac{2}{1\,458}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{1}{3^6}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 3^{-\frac{6}{n-1}}$$

$$q < \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{-\frac{6}{n-1}} < 3^{-1} \Rightarrow \frac{6}{n-1} > 1 \Rightarrow n-1 < 6 \Rightarrow n < 7$$

Como a P.G. deve ter no máximo 6 termos, então o número de meios a interpolar é no máximo 4.

$$138. \quad \text{P.G. } (a, x, y, b) \Rightarrow \begin{cases} xy = ab & (1) \\ x^2 = ay & (2) \\ y^2 = xb & (3) \end{cases}$$

De (1), vem: $y = \frac{ab}{x}$, que substituído em (2) implica:

$$x^2 = a \cdot \frac{ab}{x} \Rightarrow x^3 = a^2b \Rightarrow x = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{Analogamente, } x = \frac{ab}{y} \Rightarrow y^2 = \frac{ab}{y} \cdot b \Rightarrow y^3 = ab^2 \Rightarrow y = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}.$$

$$140. \quad \begin{aligned} a) \quad S &= \log_2 a + \log_2 2a + \log_2 4a + \dots + \log_2 2^n a = \\ &= \log_2 [a \cdot 2a \cdot 4a \cdot \dots \cdot 2^n a] \end{aligned}$$

O logaritmando é uma P.G., tal que $a_1 = a$, $q = 2$ e o número de termos é $n + 1$.

Para calcular esse produto, temos:

$$P = a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\text{E, então, } S = \log_2 \left[a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \right] = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\log_2 a.$$

b) Sendo $S = n + 1$, então:

$$n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\log_2 a \Rightarrow 1 = \frac{n}{2} + \log_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{n}{2} = \log_2 a \Rightarrow a = 2^{1 - \frac{n}{2}}.$$

$$141. \quad \begin{cases} \log_a b = 4 & (1) \\ \log_q b = 2 & (2) \\ \log_c b = \frac{1}{100} & (3) \\ c = a^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} & (4) \end{cases}$$

De (3), vem: $b = c^{\frac{1}{100}}$ (5)

Substituindo (4) em (5), temos: $b = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}}$ (6)

Substituindo (6) em (1), vem:

$$\log_a \left(a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \right) = 4 \Rightarrow a^4 = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \Rightarrow a = q^{\frac{n(n-1)}{2(400-n)}} \quad (7)$$

Substituindo (6) em (2), vem:

$$\log_q \left(a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \right) = 2 \Rightarrow q^2 = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \Rightarrow a = q^{\frac{400-n(n-1)}{2n}} \quad (8)$$

Comparando (7) e (8), temos:

$$q^{\frac{n(n-1)}{2(400-n)}} = q^{\frac{400-n(n-1)}{2n}} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{400-n} = \frac{400-n(n-1)}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400n^2 = 400^2 \Rightarrow n^2 = 400 \Rightarrow n = 20$$

143.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2n-1} \cdot a_{2n} = (a_2 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{2n}) \cdot (a_1 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2n-1})$$

$$a_{2n} = 2^n \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow a_2 = 2^2 = 4 \\ n=2 \rightarrow a_4 = 2^4 = 16 \\ n=3 \rightarrow a_6 = 2^6 = 64 \end{cases}$$

Então, a sequência dos termos de ordem par é 4, 16, 64, ..., em que $a_2 = 4$ e $q = 4$.

$$a_{2n-1} = (-3)^{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = (-3)^1 = -3 \\ n=2 \rightarrow a_3 = (-3)^3 = -27 \\ n=3 \rightarrow a_5 = (-3)^5 = -243 \end{cases}$$

Então, a sequência dos termos de ordem ímpar é -3, -27, -243, ..., em que $a_1 = -3$ e $q = 9$.

Entre os 55 termos iniciais há 28 termos ímpares e 27 termos pares. Assim:

$$P_{28} = (-3)^{28} \cdot (9)^{\frac{28 \cdot 27}{2}} = (-3)^{28} \cdot (9)^{378} = 3^{784}$$

$$P_{27} = 4^{27} \cdot 4^{\frac{27 \cdot 26}{2}} = 4^{27} \cdot 4^{351} = 4^{378} = 2^{756}$$

$$\text{Assim: } P_{55} = P_{28} \cdot P_{27} = 3^{784} \cdot 2^{756}.$$

$$146. \quad \begin{cases} a_2 + a_4 = 10 \\ a_1 + a_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q + a_1 q^3 = 10 \\ a_1 + a_1 q^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 q(1 + q^2) = 10 & (1) \\ a_1(1 + q^2) = 5 & (2) \end{cases}$$

Dividindo (1) por (2), membro a membro, vem:

$$q = 2 \Rightarrow a_1 = 1 \text{ e, portanto, } a_4 = 1 \cdot 2^3 \Rightarrow a_4 = 8.$$

147. (base b , altura h , área a)

$$\begin{cases} \text{por hipótese: } \frac{h}{b} = 8 \Rightarrow h = 8b & (1) \\ \text{propriedade dos termos da P.G.: } h^2 = ba & (2) \\ \text{área do triângulo: } a = \frac{b \cdot h}{2} & (3) \end{cases}$$

$$\text{Substituindo (3) em (2), temos: } h^2 = \frac{b^2 h}{2} \Rightarrow h = \frac{b^2}{2}.$$

$$\text{Considerando (1), vem: } \frac{b^2}{2} = 8b \Rightarrow b = 16.$$

$$148. \quad S_3 = \frac{3(q^3 - 1)}{q - 1} = 21 \Rightarrow \frac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = 7 \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = -3 \text{ ou } q = 2$$

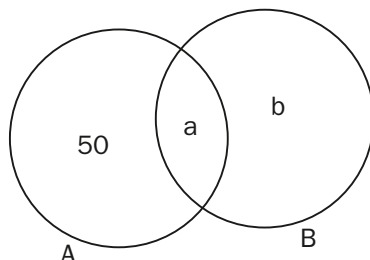
$$S_4 = \frac{3(q^4 - 1)}{q - 1} = 45 \Rightarrow \frac{(q^2 + 1)(q + 1)(q - 1)}{q - 1} = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (q^2 + 1)(q + 1) = 15$$

Verifica-se que $q = -3$ não satisfaz esta última condição.
Então, $q = 2$.

$$\text{Portanto: } S_5 = \frac{3(2^5 - 1)}{2 - 1} = 93.$$

149.



$$50 + a + b = 62 \Rightarrow a = 12 - b \quad (1)$$

$$\text{P.G. } (50, a, b) \Rightarrow a^2 = 50b \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), temos:

$$a = 12 - b \Rightarrow a^2 = 144 - 24b + b^2 = 50b$$

$$b^2 - 74b + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 72 \text{ (rejeitado porque é maior que } n(A \cup B)) \\ \text{ou} \\ b = 2 \Rightarrow a = 10 \end{cases}$$

Então: P.G. $(50, 10, 2)$ e $n(A \cap B) = 10$.

150.

$$(x, y, z) \text{ é P.A.} \Rightarrow (x = y - r \text{ e } z = y + r)$$

$$\text{Por hipótese, } x + y + z = 15 \Rightarrow y - r + y + y + r = 15 \Rightarrow y = 5$$

$$\text{e daí } x = 5 - r \text{ e } z = 5 + r.$$

$$(x, y + 1, z + 5) \text{ é P.G.} \Rightarrow (5 - r, 6, 10 + r) \text{ é P.G.}$$

$$\text{Então: } 6^2 = (5 - r)(10 + r) \Rightarrow r = 2 \text{ ou } r = -7.$$

$$\text{Para } r = 2, x = 3, y = 5 \text{ e } z = 7 \Rightarrow 3z = 21.$$

$$\text{Para } r = 7, x = 12 \text{ (rejeitado porque } 12 > 10).$$

151.

$$\text{P.A. } (a, a + r, a + 2r, \dots) \Rightarrow S_3 = 3(a + r)$$

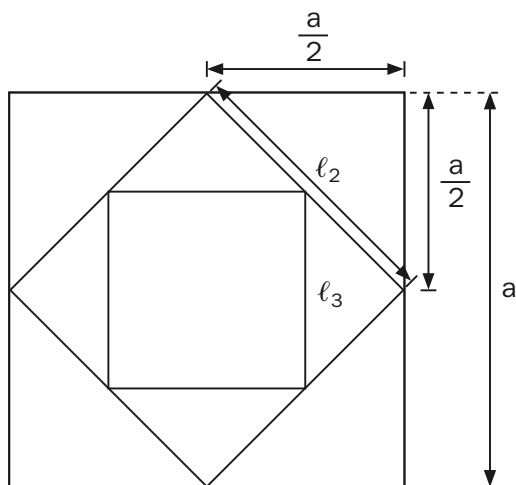
$$\text{P.G. } \left(a, \frac{2\sqrt{3}}{3}r, S_3, \dots \right) \Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r \right)^2 = a \cdot S_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4r^2}{3} = 3a(a+r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^2 + 9ra - 4r^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{r}{3} \text{ ou } a = -\frac{4}{3}r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{a}{r} = -\frac{4}{3}$$

153.



ℓ_2 é lado de Q_2

$$\ell_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ℓ_3 é lado de Q_3

$$\ell_3^2 = \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \ell_3 = \frac{a}{2}$$

Então, considerando os lados, temos:

$$\text{P.G.} \left(a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \dots, a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \right).$$

Considerando as áreas, vem:

$$\text{P.G.} \left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \dots \right), \text{ em que } a_1 = a^2 \text{ e } q = \frac{1}{2}.$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a^2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a^2(2^n - 1)}{2^{n-1}}$$

155. $\sum_{i=3}^n 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$ é a soma dos elementos de uma P.G.

em que $a_1 = 2^3$, $q = 2$ e o último termo é 2^n . Essa P.G. tem $n - 2$ termos, então:

$$\sum_{i=3}^n 2^i = \frac{2^3(2^{n-2} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 8 = 4088.$$

Daí resulta $2^{n+1} = 4096 = 2^{12}$ e $n = 11$.

157. $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $S_{2n} = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q - 1}$ e $S_{3n} = \frac{a_1(q^{3n} - 1)}{q - 1}$

$$S_n^2 + S_{2n}^2 = \frac{a_1^2}{(q - 1)^2} \cdot \left[(q^n - 1)^2 + (q^{2n} - 1)^2 \right] =$$

$$= \frac{a_1^2}{(q - 1)^2} \cdot (q^{4n} - q^{2n} - 2q^n + 2)$$

$$S_n(S_{2n} + S_{3n}) = \frac{a_1}{q - 1}(q^n - 1) \cdot \left[\frac{a_1}{q - 1} \cdot (q^{2n} - 1 + q^{3n} - 1) \right] =$$

$$= \frac{a_1^2}{(q - 1)^2} \cdot (q^n - 1)(q^{3n} + q^{2n} - 2) = \frac{a_1^2}{(q - 1)^2} \cdot (q^{4n} + q^{2n} - 2q^n + 2)$$

então: $S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n(S_{2n} + S_{3n})$.

$$158. \quad S_1 = \frac{a_{10}q - a_1}{q - 1} = 3096 \quad (1)$$

$$S_2 = \frac{a_{11}q - a_2}{q - 1} = 6138 \quad (2)$$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{a_{11}q - a_2}{a_{10}q - a_1} = \frac{6138}{3069} = 2 \Rightarrow \frac{a_1q^{11} - a_1q}{a_1q^{10} - a_1} = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{a_1q(q^{10} - 1)}{a_1(q^{10} - 1)} = 2 \Rightarrow q = 2 \end{aligned}$$

Substituindo $q = 2$ em (1), vem $a = 3 \Rightarrow$ P.G. (3, 6, 12, ..., 3072).

159. Seja P.G. $(a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1})$ de razão q e seja

P.G. $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{aq}, \frac{1}{aq^2}, \dots, \frac{1}{aq^{n-1}}\right)$ de razão $\frac{1}{q}$.

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S^n = \frac{a^n(q^n - 1)^n}{(q - 1)^n}$$

$$S' = \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{q^n} - 1 \right)}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{q^n - 1}{aq^{n-1}(q - 1)} \Rightarrow (S')^n = \frac{(q^n - 1)^n}{a^n q^{n(n-1)}(q - 1)^n}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{S'} \right)^n &= \frac{\frac{a^n(q^n - 1)^n}{(q^n - 1)^n}}{\frac{a^n q^{n(n-1)}(q - 1)^n}{(q^n - 1)^n}} = \frac{a^n(q^n - 1)^n}{(q - 1)^n} \cdot \frac{a^n q^{n(n-1)}(q - 1)^n}{(q^n - 1)^n} = \\ &= a^{2n} q^{n(n-1)} = P^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 161. \quad S &= 1 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{9} + \frac{2}{25} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + \dots = \\
 &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots\right)}_{S_1} + \underbrace{\left(2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \dots + 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + \dots\right)}_{S_2}
 \end{aligned}$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = 2\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^n + \dots\right) = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

$$165. \quad S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S_{1000} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{1000} - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3\left(\frac{1 - 3^{1000}}{3^{1000}}\right)}{-2} = \frac{3(3^{1000} - 1)}{2 \cdot 3^{1000}} =$$

$$= \frac{3^{1000} - 1}{2 \cdot 3^{999}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{999}$$

$$\text{Então, } S_{1000} = S - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{999}, \text{ ou seja, } S = S_{1000} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{999}, \text{ isto}$$

é, comete-se um erro de $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{999}$ para mais.

166. $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots$

Podemos decompor cada parcela, a partir da segunda, em uma soma de frações.

$$1 = 1$$

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{5}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$\vdots$

Verificamos que cada coluna forma uma nova série infinita.

$$1^{\text{a}} \text{ coluna: } a_1 = 1 \text{ e } q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$2^{\text{a}} \text{ coluna: } a_1 = \frac{1}{2} \text{ e } q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$3^{\text{a}} \text{ coluna: } a_1 = \frac{1}{4} \text{ e } q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_3 = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$4^{\text{a}} \text{ coluna: } a_1 = \frac{1}{8} \text{ e } q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_4 = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

e assim por diante.

As somas $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$, por sua vez, formam uma P.G. infinita de

primeiro termo 2 e razão $\frac{1}{2}$, então:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

$$167. \quad \left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ a_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} \Rightarrow a_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$168. \quad 2 + \frac{4}{m} + \frac{8}{m^2} + \dots = \frac{14}{5}$$

$$2\left(1 + \frac{2}{m} + \frac{4}{m^2} + \dots\right) = \frac{14}{5}$$

$$\text{Sendo } S = 1 + \frac{2}{m} + \frac{4}{m^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{2}{m}} = \frac{m}{m-2}, \text{ temos:}$$

$$2\left(\frac{m}{m-2}\right) = \frac{14}{5} \Rightarrow m = 7.$$

$$169. \quad \begin{array}{l} S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \\ xS = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots \\ \text{então, } S - xS = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \end{array}$$

e daí vem:

$$(1-x) \cdot S = \frac{1}{1-x} \Rightarrow S = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\begin{aligned}
 171. \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots = \\
 & = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots}_{S_2} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \\ S_2 &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_1 + S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 172. \quad S &= 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} + \dots = \\
 &= (2 - 1) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{64}\right) + \dots + \\
 &+ \left(\frac{2^n}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{2n-2}}\right) + \dots = \\
 &= \left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{2^n}{2^{2n-2}} + \dots\right) - \\
 &- \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}} + \dots\right) = \\
 &= \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

173. a) $0,417417... = \frac{417}{1000} + \frac{417}{1000000} + ... =$

$$= \frac{\frac{417}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{417}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{417}{999} = \frac{139}{333}$$

b) $5,121212... = 5 + \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + ... =$

$$= 5 + \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 5 + \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = 5 + \frac{12}{99} = 5 + \frac{4}{33} = \frac{169}{33}$$

c) $0,17090909... = \frac{1}{100} (17,090909...) =$

$$= \frac{1}{100} \left[17 + \frac{9}{100} + \frac{9}{10000} + ... \right] = \frac{1}{100} \left[17 + \frac{1}{11} \right] = \frac{47}{275}$$

d) $9,3858585... = \frac{1}{10} [93,858585...] =$

$$= \frac{1}{10} \left[93 + \frac{85}{100} + \frac{85}{10000} + ... \right] = \frac{1}{10} \left[93 + \frac{85}{99} \right] = \frac{4646}{495}$$

176. $a_1 + a_3 + a_5 + ... = 20$ (razão: q^2)

$a_2 + a_4 + a_6 + ... = 10$ (razão: q^2)

$S_i = \frac{a_1}{1 - q^2} = 20$ e $S_p = \frac{a_2}{1 - q^2} = 10$, de onde vem:

$$\frac{S_p}{S_i} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}, \text{ isto é, } q = \frac{1}{2}.$$

Substituindo $q = \frac{1}{2}$ em S_i , vem: $a_1 = 15$.

178. a) $a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow \frac{2(a^2 + 1)^2}{5a} = \frac{25a^2}{4(a^2 + 1)} \cdot q^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{8(a^2 + 1)^3}{125a^3} \Rightarrow q = \frac{2(a^2 + 1)}{5a}$$

A P.G. é decrescente $\Rightarrow$ se $a > 0$, $0 < q < 1$

$$\text{Então, } 0 < \frac{2(a^2 + 1)}{5a} < 1 \Rightarrow \overset{(1)}{0 < 2(a^2 + 1)} < \underset{(2)}{5a}$$

(1) $2(a^2 + 1) > 0, \forall a \in \mathbb{R}.$

(2) $2(a^2 + 1) < 5a \Rightarrow 2a^2 - 5a + 2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < a < 2$

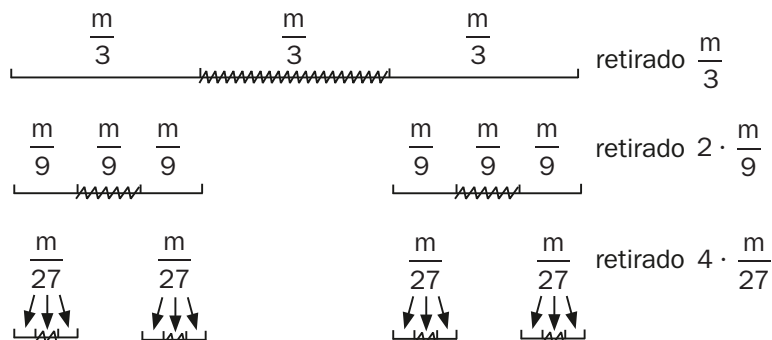
$(1) \cap (2) \Rightarrow \frac{1}{2} < a < 2$

b) $q = a - \frac{1}{5} = \frac{2(a^2 + 1)}{5a} \Rightarrow 3a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{-2}{3} \end{cases} \text{ (rejeitado)}$

Para $a = 1 \Rightarrow q = \frac{4}{5}$ e $a_1 = \frac{25}{8}.$

Então: $S = \frac{\frac{25}{8}}{1 - \frac{4}{5}} \Rightarrow S = \frac{125}{8}.$

179.



$\left(\frac{m}{3}, \frac{2m}{9}, \frac{4m}{27}, \dots\right)$ é P.G. em que $a_1 = \frac{m}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$.

$$S = \frac{\frac{m}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \quad S = m.$$

180. $\ell_1 = 3 \Rightarrow p_1 = 9$

$$\ell_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{9}{2}$$

$$\ell_3 = \frac{3}{4} \Rightarrow p_3 = \frac{9}{4}$$

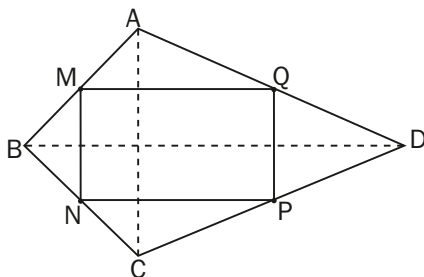
etc.

A sequência dos perímetros $\left(9, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \dots\right)$, é P.G. em que $a_1 = 9$ e $q = \frac{1}{2}$, então $S = \frac{9}{1 - \frac{1}{2}} = 18$.

181. Os perímetros $p, \frac{p}{2}, \frac{p}{4}, \dots$ formam uma P.G. em que $a_1 = p$ e $q = \frac{1}{2}$,

$$\text{então } S = \frac{p}{1 - \frac{1}{2}} = 2p.$$

182. Seja ABCD um quadrilátero qualquer e seja MNPQ o quadrilátero que tem vértices nos pontos médios dos lados de ABCD.



Temos:

$$A_{AMQ} + A_{CNP} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABD} + \frac{1}{4} \cdot A_{BCD} = \frac{1}{4} \cdot A$$

$$A_{BMN} + A_{DPQ} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABC} + \frac{1}{4} \cdot A_{ACD} = \frac{1}{4} \cdot A$$

Então a soma das áreas dos triângulos AMQ, CNP, BMN e DPQ é $\frac{A}{2}$;

portanto, a área de MNPQ é $\frac{A}{2}$, em que A é a área de ABCD.

Concluimos, dessa forma, que as áreas dos quadriláteros construídos

conforme descrição do enunciado formam a P.G.: $\left(A, \frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \dots\right)$, cuja

$$\text{soma é } S = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}} = 2A.$$

183. As áreas dos círculos formam a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ de razão $\frac{1}{2}$.

Determinemos a sequência $(d_1, d_2, d_3, \dots)$ dos diâmetros dessas circunferências.

$$d_1 = d \Rightarrow a_1 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{8} \Rightarrow d_2^2 = \frac{d^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$d_2 = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 = \pi \left(\frac{d_2}{2} \right)^2 = \frac{\pi d^2}{8} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{\pi d^2}{16} \Rightarrow d_3^2 = \frac{d^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_3 = \frac{d}{2}$$

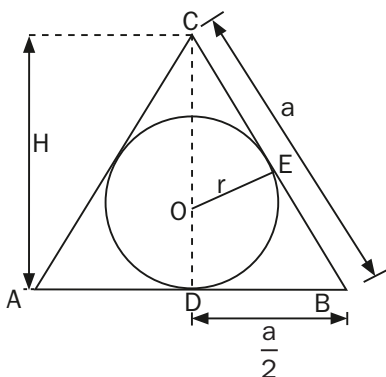
etc.

Os diâmetros formam a P.G.: $\left(d, \frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{2}, \dots \right)$ cuja soma é $A_0 A_n$,

$$\text{então } A_0 A_n = \frac{d}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = d(2 + \sqrt{2}).$$

184. I) $\triangle BDC \sim \triangle OEC \Rightarrow \frac{BD}{OE} = \frac{BC}{OC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{H-r} \quad (1)$$



Por Pitágoras, no $\triangle CDB$, vem:

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

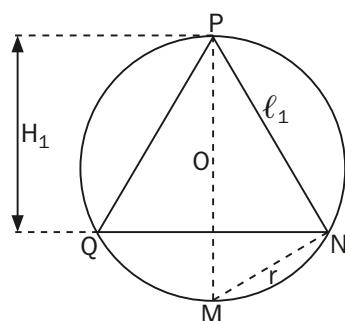
De (1) e (2), temos: $\frac{a}{2r} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2} - r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

II) Por Pitágoras, no $\triangle MNP$, vem:

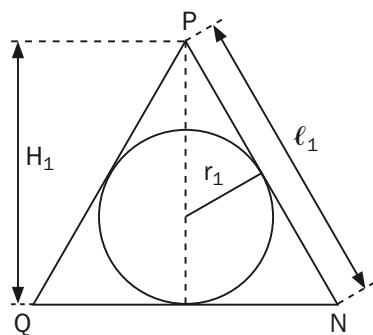
$$(PM)^2 = (PN)^2 + (MN)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2r)^2 = \ell_1^2 + r^2 \Rightarrow \ell_1 = \frac{a}{2} \quad (4)$$



III) Por analogia à parte (I), vem:

$$H_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4} \quad (5) \quad \text{e} \quad r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{12} \quad (6)$$



IV) Lados dos triângulos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{por hipótese, } a_1 = a \\ \text{de (4), } a_2 = \frac{a}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{P.G.} \left(a, \frac{a}{2}, \dots \right); q_{\Delta} = \frac{1}{2}$$

raios das circunferências:

$$\left. \begin{array}{l} \text{de (2), } r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ \text{de (6), } r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{P.G.} \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{12}, \dots \right); q_{\circ} = \frac{1}{2}$$

áreas dos triângulos:

$$\text{por hipótese e de (2): } A_1 = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{de (4) e de (5): } A_2 = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{Portanto: P.G.} \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \frac{a^2\sqrt{3}}{16}, \dots \right); q_{\Delta} = \frac{1}{4}$$

áreas dos círculos:

$$\text{de (3): } \alpha_1 = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$$

$$\text{de (6): } \alpha_2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{12} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{48}$$

$$\text{Portanto: P.G.} \left(\frac{\pi a^2}{12}, \frac{\pi a^2}{48}, \dots \right); q_{\circ} = \frac{1}{4}.$$

Assim:

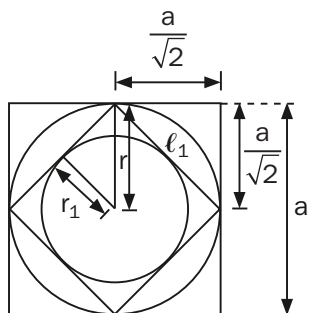
$$\text{a) } S_{\Delta} = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\Delta} = 2a$$

$$\text{b) } S_{\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{c) } S_{\Delta} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{d) } S_{\circ} = \frac{\frac{\pi a^2}{12}}{1 - \frac{1}{4}} \Rightarrow S_{\circ} = \frac{\pi a^2}{9}$$

185. a) $\ell_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$



1º quadrado: lado = $a \Rightarrow p_1 = 4a$

2º quadrado: lado = $\frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow p_2 = \frac{4a}{\sqrt{2}}$

P.G. $\left(4a, \frac{4a}{\sqrt{2}}, \dots\right); q_{\square} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_{\square} = \frac{4a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}a(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = S_{\square} = 4a(2+\sqrt{2})$$

$$\text{b) } 1^\circ \text{ círculo: } r = \frac{a}{2} \Rightarrow C = 2\pi r \Rightarrow C = \pi a$$

$$2^\circ \text{ círculo: } r_1 = \frac{\ell_1}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow C_1 = \frac{\pi a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{P.G. } \left(\pi a, \frac{\pi a}{\sqrt{2}}, \dots \right); q_{\bigcirc} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\bigcirc} = \frac{\pi a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi a \sqrt{2} (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \Rightarrow S_{\bigcirc} = \pi a (2 + \sqrt{2})$$

$$\text{c) } 1^\circ \text{ quadrado: lado} = a \Rightarrow \text{área} = a^2$$

$$2^\circ \text{ quadrado: lado} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{área} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{P.G. } \left(a^2, \frac{a^2}{2}, \dots \right); q_{\square} = \frac{1}{2}$$

$$S_{\square} = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\square} = 2a^2$$

$$\text{d) } 1^\circ \text{ círculo: raio} = \frac{a}{2} \Rightarrow \text{área} = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$2^\circ \text{ círculo: raio} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \text{área} = \frac{\pi a^2}{8}$$

$$\text{P.G. } \left(\frac{\pi a^2}{4}, \frac{\pi a^2}{8}, \dots \right); q_{\bigcirc} = \frac{1}{2}$$

$$S_{\bigcirc} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\bigcirc} = \frac{\pi a^2}{2}$$

CAPÍTULO IV — Matrizes

$$189. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$1) \quad +/A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

$$2) \quad +/A = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]_{1 \times p}$$

$$\text{Assim: } +/(+/A) = +/[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] = [p]$$

$$191. \quad \left. \begin{array}{l} x^2 = x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ 2x = x \Rightarrow x = 0 \end{array} \right\} x = 0$$

$$y = 3$$

$$z = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 = 5t \Rightarrow t = 1 \\ t^2 = t \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1 \end{array} \right\} t = 1$$

$$195. \quad \left. \begin{array}{l} c_{21} = a_{21} + b_{21} = 3 + 9 = 12 \\ c_{22} = a_{22} + b_{22} = 4 + 10 = 14 \\ c_{23} = a_{23} + b_{23} = 5 + 11 = 16 \end{array} \right\} c_{21} + c_{22} + c_{23} = 12 + 14 + 16 = 42$$

196. $\alpha + 2 = 3 \Rightarrow \alpha = 1$
 $1 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$
 $1 + 0 = \gamma \Rightarrow \gamma = 1$
 $2 + (-1) = \delta \Rightarrow \delta = 1$

197.
$$\begin{cases} y^3 - y - 1 = 5 & (1) \\ y^2 + 2y + 2 = 10 \Rightarrow y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -4) \end{cases}$$

Substituindo $y = 2$ em (1): $8 - 2 - 1 = 5$. (V)

Substituindo $y = -4$ em (1): $-64 + 4 - 1 = 5$. (F)

Portanto, $y = 2$.

$$\begin{cases} 3x + x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = -3) \\ 4x + x^2 + 2 = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Substituindo $x = 0$ em (2): $0 + 0 + 3 = 0$. (F)

Substituindo $x = -3$ em (2): $9 - 12 + 3 = 0$. (V)

Portanto: $x = -3$.

201. $|a_{11} - b_{11}| = |1 - 5| = |-4| = 4$
 $|a_{12} - b_{12}| = |2 - 7| = |-5| = 5$
 $|a_{21} - b_{21}| = |3 - 6| = |-3| = 3$
 $|a_{22} - b_{22}| = |4 - 8| = |-4| = 4$
 $d(A; B) = 5$

204. a) $2X + A = 3B + C$
 $2X = 3B + C - A$

$$X = \frac{1}{2}(3B + C - A) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 6 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$b) X + A = \frac{1}{2}(B - C)$$

$$X = \frac{1}{2}(B - C) - A \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{15}{2} \\ -1 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$c) 3X + A = B - X$$

$$3X + X = B - A$$

$$4X = B - A$$

$$X = \frac{1}{4}(B - A) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$d) \frac{1}{2}(X - A - B) = \frac{1}{3}(X - C)$$

$$3(X - A - B) = 2(X - C)$$

$$3X - 3A - 3B = 2X - 2C$$

$$X = 3A + 3B - 2C \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}$$

$$205. \quad \frac{X-A}{2} = \frac{B+X}{3} + C \Rightarrow 3(X-A) = 2(B+X) + 6C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X - 2X = 3A + 2B + 6C \Rightarrow X = 3A + 2B + 6C$$

$$\text{então, } X = \begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}$$

$$207. \quad \begin{cases} X + Y = A & (1) \\ X - Y = B & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2X = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2Y = A - B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$208. \quad \begin{cases} 2X + 3Y = A + B \\ 3X + 4Y = A - B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6X + 9Y = 3A + 3B & (1) \\ 6X + 8Y = 2A - 2B & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow Y = A + 5B = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad 6X = 3A + 3B - 9Y = \begin{bmatrix} -90 \\ -228 \\ -54 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -15 \\ -38 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$210. \quad c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} + a_{24} \cdot b_{43} + a_{25} \cdot b_{53} + a_{26} \cdot b_{63} + \\ + a_{27} \cdot b_{73} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 5 + \\ + (-4) \cdot 6 + (-5) \cdot 7 = 1 + 0 - 3 - 8 - 15 - 24 - 35 = -84$$

$$215. \quad a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 \\ 56 \end{bmatrix}$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$$

219. Como $(AB)_{3 \times 3}$ e $A_{3 \times 3}$, então $B_{3 \times 3}$.

$$AB = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ax & b & 2c \\ 3a & by & 5c \\ 2a & 3b & cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Então, temos:

$$\left. \begin{array}{l} ax = 2 \\ 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \\ 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} b = 3 \\ by = 12 \\ 3b = 9 \Rightarrow b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \\ 5c = 25 \Rightarrow c = 5 \\ cz = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 4$$

221.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1+2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 2x \end{bmatrix}$$

Como $AB = BA$, então:

$$\begin{bmatrix} 2x & 1+2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x+y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

225.

A e B são comutáveis significa dizer que $AB = BA$.

$$\begin{aligned} \text{a) } (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = \\ &= A^2 + AB + AB + B^2 = \\ &= A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (A - B)^2 &= (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 = \\ &= A^2 - AB - AB + B^2 = \\ &= A^2 - 2AB + B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (A + B)^3 &= (A + B)^2(A + B) = (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) = \\ &= A^3 + A^2B + 2ABA + 2AB^2 + B^2A + B^3 = \\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 = \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \end{aligned}$$

d) Analogamente.

e) Por indução:

$$\text{I) Vale para } k = 1: (AB)^1 = A^1 \cdot B^1 = AB$$

$$\text{II) Suponhamos válido para } n = k: (AB)^k = A^k \cdot B^k$$

III) Vamos provar que vale para $n = k + 1$:

$$(AB)^{k+1} = (AB)^k(AB)^1 = A^k B^k \cdot AB = A^k \cdot A \cdot B^k \cdot B = A^{k+1} B^{k+1}$$

226. a) $(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

b) $(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 19 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}$

c) $A^2 - 2I_2A + I_2^2 = (A - I_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$

d) $A^3 - I_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 55 & 189 \\ 42 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$
 $= \begin{bmatrix} 54 & 189 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}$

228. Fazendo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Logo:
$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 & (1) \\ bc + d^2 = 1 & (2) \\ ab + bd = 0 & (3) \\ ac + cd = 0 & (4) \end{cases}$$

De (3) vem: $b(a + d) = 0$; então, temos:

1ª possibilidade: $a + d = 0$

Neste caso, $d = -a = \pm \sqrt{1 - bc}$, e para satisfazer (3) e (4) servem quaisquer b e c , $bc \leq 1$.

2ª possibilidade: $b = 0$ e $a + d \neq 0$

Neste caso, o sistema fica:

$$(1) a^2 = 1, (2) d^2 = 1, (4) c(a + d) = 0$$

cuja solução é $(a = d = 1 \text{ e } c = 0)$ ou $(a = d = -1 \text{ e } c = 0)$.

Assim:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$$

229.

$$\text{Fazendo } X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ então } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\text{logo: } \begin{cases} a^2 + bc = a & (1) \\ ab + bd = b & (2) \\ ac + cd = c & (3) \\ bc + d^2 = d & (4) \end{cases}$$

De (2) vem: $b(a + d) = b$; então, temos:

1ª possibilidade: $a + d = 1$ e b qualquer

Neste caso, temos:

$$(1) \quad a^2 - a + bc = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2}, \text{ com } bc \leq \frac{1}{4}$$

$$(4) \quad d^2 - d + bc = 0 \Rightarrow d = \frac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2}$$

Como $a + d = 1$, os sinais tomados diante do radical $\sqrt{1-4bc}$ devem ser opostos.

Note-se que para (3) o valor de c é qualquer.

2ª possibilidade: $b = 0$ e $a + d \neq 1$

Neste caso, o sistema fica:

$$(1) a^2 = a, (3) c(a + d) = c, (4) d^2 = d$$

cujas soluções são $(a = c = d = 0)$ ou $(a = 1 = d \text{ e } c = 0)$.

Portanto:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{1 - 4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1 - \sqrt{1 - 4bc}}{2} \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1 - \sqrt{1 - 4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1 + \sqrt{1 - 4bc}}{2} \end{bmatrix}$$

232.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 7 & z \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow (x = 2, y = 5 \text{ e } z = -4)$$

233.

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1 - z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x & -y \\ 4 & 0 & -2z \\ -2 & z - 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x = 4, y = -2 \text{ e } z = -1)$$

234.

Para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ temos:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}.$$

237.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 + 2x & -1 + 2y \\ 2 + 4x & -1 + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 + 2x = 1 \\ 2 + 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} -1+2y=0 \\ -1+4y=1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ e, então, } x + y = 0.$$

238.

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3-x \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-x & 1-x \\ x-x^2 & 2x-x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então:

$$2 - x = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$2x - x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

portanto, $x = 1$.

239.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + A^{-1})^3 = (2A)^3 = 8A^3 =$$

$$= 8A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

244.

$$B = PAP^{-1} \Rightarrow BP = PAP^{-1}P \Rightarrow BP = PA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \begin{bmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 2a+30 & -a+50 \\ 150+3b & -75+5b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+30=78 \\ -a+50=26 \end{cases} \Rightarrow a=24$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 150+3b=117 \\ -75+5b=-130 \end{cases} \Rightarrow b=-11$$

246.

a) $AX = B$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$I_n X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

b) $AXB = I_n$

$$A^{-1}AXB = A^{-1}I_n$$

$$I_n XB = A^{-1}$$

$$XBB^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

$$XI_n = A^{-1}B^{-1}$$

$$X = A^{-1}B^{-1}$$

c) $(AX)^{-1} = B$

$$AX = B^{-1}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B^{-1}$$

$$I_n X = A^{-1}B^{-1}$$

$$X = A^{-1}B^{-1}$$

d) $BAX = A$

$$B^{-1}BAX = B^{-1}A$$

$$I_n AX = B^{-1}A$$

$$AX = B^{-1}A$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B^{-1}A$$

$$I_n X = A^{-1}B^{-1}A$$

$$X = A^{-1}B^{-1}A$$

e) $(AX)^t = B$

$$[(AX)^t]^t = B^t$$

$$AX = B^t$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B^t$$

$$I_n X = A^{-1}B^t$$

$$X = A^{-1}B^t$$

f) $(A + X)^t = B$

$$[(A + X)^t]^t = B^t$$

$$A + X = B^t$$

$$X = B^t - A$$

247.

$$(XA)^{-1} = B \Rightarrow XA = B^{-1} \Rightarrow XAA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}$$

Determinemos A^{-1} :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 4c = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{11} \text{ e } c = \frac{2}{11}$$

$$\begin{cases} 3b + 4d = 0 \\ -2b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{4}{11} \text{ e } d = \frac{3}{11}$$

$$\text{Então, } A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinemos B^{-1} :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5e - 2g = 1 \\ 3g = 0 \end{cases} \Rightarrow g = 0 \quad e \quad e = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} 5f - 2h = 0 \\ 3h = 1 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{1}{3} \quad e \quad f = \frac{2}{15}$$

$$\text{Então, } B^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$X = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{165} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

250. Devemos provar que $D = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de ABC , isto é, que $D(ABC) = (ABC)D = I_n$.

$$\begin{aligned} 1^\circ) D(ABC) &= (C^{-1}B^{-1}A^{-1})(ABC) = C^{-1}B^{-1}(A^{-1}A)BC = C^{-1}B^{-1}I_nBC = \\ &= C^{-1}(B^{-1}B)C = C^{-1}I_nC = C^{-1}C = I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ) (ABC)D &= (ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = AB(CC^{-1})B^{-1}A^{-1} = ABI_nB^{-1}A^{-1} = \\ &= A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \end{aligned}$$

251. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz inversível.

Determinemos A^{-1} :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{d}{ad - bc} \quad e \quad z = \frac{-c}{ad - bc}$$

$$\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-b}{ad - bc} \quad e \quad t = \frac{a}{ad - bc}$$

$$\text{então: } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad e \quad (A^{-1})^t = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Determinemos $(A^t)^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ap + cr = 1 \\ bp + dr = 0 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{d}{ad - bc} \text{ e } r = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$\begin{cases} aq + cs = 0 \\ bq + ds = 1 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{-c}{ad - bc} \text{ e } s = \frac{a}{ad - bc}$$

$$\text{então: } (A^t)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{e daí } (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

CAPÍTULO V — Determinantes

253.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \sin y & \cos y \end{vmatrix} = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \sin(x + y)$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 \sin x & 3 \cos x \\ 1 - 2 \cos x & 3 \sin x + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \sin x(3 \sin x + 2) - 3 \cos x(1 - 2 \cos x) =$$

$$= 6 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x =$$

$$= 6 + 4 \sin x - 3 \cos x$$

254.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \log a & \log b \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \log a - \frac{1}{2} \log b = \log \sqrt[4]{a} - \log \sqrt{b} =$$

$$= \log \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} = \log \sqrt[4]{\frac{a}{b^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^4 - m \\ m & m^3 - 1 \end{vmatrix} &= 2m^2(m^3 - 1) - m(2m^4 - m) = \\ &= 2m^5 - 2m^2 - 2m^5 + m^2 = -m^2 \end{aligned}$$

255. $a_{ij} = j - i^2 \Rightarrow a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = -3, a_{22} = -2$

e, então, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

256. a) $\begin{vmatrix} 2x & 3x+2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \right)$

b) $\begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 4x+5 & 3x-1 \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1 \right)$

257. $\begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ -1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (duas raízes reais distintas)

258.
$$\left. \begin{aligned} x &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow x = ad - bc \\ y &= \det \begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix} \Rightarrow y = -6(ad - bc) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = -6$$

261. $D = \begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$$262. \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = m - 1$$

$$D' = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & m+4 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow D' = 5(m-1) \Rightarrow D' = 5D$$

$$264. \quad D_1 = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{vmatrix} = -8x - 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix} = -3x^2 - 8x$$

$$D_1 = D_2 \Rightarrow -8x - 1 = -3x^2 - 8x \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$$

$$265. \quad \begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3^x = 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$$266. \quad \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} x & -8 & -5 \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \operatorname{cotg} x \\ 0 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 0 & (1) \\ \text{ou} \\ \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

$$(2) \cos x = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} \right)$$

Então, o menor valor x tal que $0 < x < 2\pi$ é $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 267. \quad \det A &= \begin{vmatrix} \sin^2 x & \sin^2 x & 0 \\ \cos^2 x & \cos^2 y & \sin^2 y \\ r^2 & 0 & r^2 \end{vmatrix} = \\
 &= r^2 \sin^2 x \cos^2 y + r^2 \sin^2 x \sin^2 y - r^2 \sin^2 x \cos^2 x = \\
 &= r^2 \sin^2 x (\cos^2 y + \sin^2 y - \cos^2 x) = r^2 \sin^2 x (1 - \cos^2 x) = \\
 &= r^2 \sin^2 x \sin^2 x = r^2 \sin^4 x
 \end{aligned}$$

$$268. \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = xy = 15 \quad (1)$$

$$\text{traço de } A = x + y + 1 = 9 \quad (2)$$

$$\text{De (1) e (2), vem: } \begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x = 5 \text{ ou } x = 3)$$

Para $x = 5, y = 3$ e para $x = 3, y = 5$.

$$\begin{aligned}
 278. \quad D &= \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ \textcircled{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{5+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & x \\ 0 & d & x & e \\ 0 & x & 0 & 0 \\ \textcircled{x} & h & i & j \end{vmatrix} = \\
 &= x \cdot (-1)^{4+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & x \\ d & x & e \\ \textcircled{x} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -x^2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & e \end{vmatrix} = \\
 &= -x^3 \cdot (-x^2) = x^5 \\
 \text{Sendo } D < -32 \Rightarrow x^5 < -32 \Rightarrow x^5 < (-2)^5 \Rightarrow x < -2.
 \end{aligned}$$

$$280. \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 11 \\ 5 & 24 & 13 \\ 7 & 36 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \cdot 1 & 11 \\ 5 & 12 \cdot 2 & 13 \\ 7 & 12 \cdot 3 & 17 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 5 & 2 & 13 \\ 7 & 3 & 17 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \\ 10 & 5 & 9 & 13 \\ 14 & 7 & -3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \cdot 1 & 11 \\ 1 \cdot 4 & 2 \cdot 4 & 3 \cdot 4 & 2 \cdot 4 \\ 10 & 5 & 3 \cdot 3 & 13 \\ 14 & 7 & 3 \cdot (-1) & 15 \end{vmatrix} = \\
 &= 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 3 & 13 \\ 14 & 7 & -1 & 15 \end{vmatrix} \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 11 & 15 \\ 5 & 13 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \cdot 1 \\ 3 & 11 & 5 \cdot 3 \\ 5 & 13 & 5 \cdot 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 11 & 3 \\ 5 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

281. A é uma matriz quadrada de ordem 4.

$$\text{Então, } \det(2A) = 2^4 \cdot \det A \Rightarrow \det(2A) = 16(-6) = -96$$

$$\text{Como } \det(2A) = x - 97, \text{ então } x - 97 = -96 \Rightarrow x = 1.$$

282. Se $\det Q \neq 0$, então Q é inversível, ou seja, existe Q^{-1} tal que $Q^{-1}Q = I_4 = QQ^{-1}$ e daí:

$$Q^3 + 2Q^2 = 0 \Rightarrow Q^3Q^{-1} + 2Q^2Q^{-1} = 0 \cdot Q^{-1} \Rightarrow Q^2 + 2Q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q^2Q^{-1} + 2QQ^{-1} = 0 \cdot Q^{-1} \Rightarrow Q + 2I_4 = 0 \Rightarrow Q = -2I_4$$

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det Q = 16$$

284.
$$D' = \begin{vmatrix} 8x & -2x^2 & 2x^3 & -2x^4 \\ 4y & -y^2 & y^3 & -y^4 \\ 4z & -z^2 & z^3 & -z^4 \\ 4t & -t^2 & t^3 & -t^4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 4 \cdot 2 \cdot x & 2 \cdot (-1) \cdot x^2 & 2 \cdot x^3 & 2 \cdot (-1) \cdot x^4 \\ 4 \cdot y & (-1) \cdot y^2 & y^3 & (-1) \cdot y^4 \\ 4 \cdot z & (-1) \cdot z^2 & z^3 & (-1) \cdot z^4 \\ 4 \cdot t & (-1) \cdot t^2 & t^3 & (-1) \cdot t^4 \end{vmatrix} = \\
 &= 4(-1)(-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ y & y^2 & y^3 & y^4 \\ z & z^2 & z^3 & z^4 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 8 \cdot D
 \end{aligned}$$

286. Multiplicamos a 1ª linha por x , a 2ª por y e a 3ª por z .

$$\begin{aligned}
 &\begin{vmatrix} zy & x & 1 \\ xz & y & 1 \\ xy & z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} xyz & x^2 & x \\ xyz & y^2 & y \\ xyz & z^2 & z \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz} \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

289.

$$\begin{vmatrix} a & b+2c & c \\ x & y+2z & z \\ m & n+2p & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & 2c & c \\ x & 2z & z \\ m & 2p & p \end{vmatrix}}_{(*)} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

(*) 2ª coluna = $2 \cdot$ 3ª coluna e, então, o determinante é igual a zero.

291.

$$\begin{vmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \sin^2 a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \sin^2 b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \sin^2 c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 a - \sin^2 a & \cos^2 a & \sin^2 a \\ \cos^2 b - \sin^2 b & \cos^2 b & \sin^2 b \\ \cos^2 c - \sin^2 c & \cos^2 c & \sin^2 c \end{vmatrix} = 0$$

porque 1ª coluna = 2ª coluna + $(-1) \cdot$ 3ª coluna, isto é, a 1ª coluna é combinação linear das outras duas.

292. Seja $M = \begin{bmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{bmatrix}$

Pelo teorema de Jacobi, podemos adicionar, à 1ª linha, a 2ª e a 3ª linhas, obtendo:

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{bmatrix}, \text{ tal que } \det M = \det M'.$$

Mas $\det M' = 0$ porque a 1ª linha é nula. Então, $\det M = 0$.

295. Vamos somar à 3ª coluna uma combinação linear das duas outras, a saber, $1^\text{a} \times 100 + 2^\text{a} \times 10$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & (0+1\cdot 100+3\cdot 10) \\ 1 & 1 & (7+1\cdot 100+1\cdot 10) \\ 1 & 5 & (6+1\cdot 100+5\cdot 10) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 130 \\ 1 & 1 & 117 \\ 1 & 5 & 156 \end{vmatrix} =$$

$$= 13 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

296. Somando à 1ª coluna as outras três colunas, temos:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix}$$

297.
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y & y & y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + y \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (x - y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (x - y) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b - a & c - a \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - y) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b - a & c - a \\ b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - y)(b - a)(c - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b + a & c + a \end{vmatrix} = (x - y)(b - a)(c - a)(c - b)$$

298.

$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} =$$

$$= \begin{vmatrix} a + b + c & a + b + c & a + b + c \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} =$$

$$= (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} =$$

$$= (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a + b + c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a + b + c) \end{vmatrix} =$$

$$= (a + b + c)(a + b + c)^2 = (a + b + c)^3$$

(1) 2^{a} linha $+ 3^{\text{a}}$ linha $+ 1^{\text{a}}$ linha

(2) 2^{a} coluna $- 1^{\text{a}}$ coluna e 3^{a} coluna $- 1^{\text{a}}$ coluna

$$\begin{aligned}
 299. \quad & \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \\
 & \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & b^2 - (a+c)^2 & 0 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & (b+a+c)(b-a-c) & 0 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \\
 & = (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} b+c-a & b-a-c & 0 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Justificativa:

(1) 1^{a} linha $- 2^{\text{a}}$ linha

300. Para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \\
 & \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos 0 & (\cos 0 + \cos a + \cos 2a) & \cos 2a \\ \cos a & (\cos a + \cos 2a + \cos 3a) & \cos 3a \\ \cos 2a & (\cos 2a + \cos 3a + \cos 4a) & \cos 2a \end{vmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \cos 0 & (\cos a + 2 \cdot \cos^2 a) & \cos 2a \\ \cos a & (\cos 2a + 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a) & \cos 3a \\ \cos 2a & (\cos 3a + 2 \cdot \cos 3a \cdot \cos a) & \cos 4a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a (1 + 2 \cdot \cos a) & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a (1 + 2 \cdot \cos a) & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a (1 + 2 \cdot \cos a) & \cos 4a \end{vmatrix} =$$

$$= (1 + 2 \cos a) \cdot \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} = (1 + 2 \cdot \cos a) \cdot D$$

então, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = D + 2D \cdot \cos a \Rightarrow D \cdot \cos a = 0 \text{ e isso exige } D = 0.$$

Justificativas:

$$(1) \text{ 2ª coluna} + (1ª \text{ coluna} + 3ª \text{ coluna})$$

$$(2) \cos 2a + \cos 0 = 2 \cdot \cos^2 a, \forall a$$

$$\cos 3a + \cos a = 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a, \forall a$$

$$\cos 4a + \cos 2a = 2 \cdot \cos 3a \cdot \cos a, \forall a$$

$$\text{pois } \cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

301.

$$\begin{vmatrix} \cos(x+a) & \sin(x+a) & 1 \\ \cos(x+b) & \sin(x+b) & 1 \\ \cos(x+c) & \sin(x+c) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(x+b) & \sin(x+b) \\ \cos(x+c) & \sin(x+c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ \cos(x+c) & \sin(x+c) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin(x + c - x - b) - \sin(x + c - x - a) + \sin(x + b - x - a) = \\
&= \sin(c - b) + \sin(a - c) + \sin(b - a) \\
&\text{que independe de } x.
\end{aligned}$$

$$302. \quad \begin{vmatrix} a^2 & a^2 + 4a + 4 & a^2 + 8a + 16 \\ a^2 + 4a + 4 & a^2 + 8a + 16 & a^2 + 12a + 36 \\ a^2 + 8a + 16 & a^2 + 12a + 36 & a^2 + 16a + 64 \end{vmatrix} = \quad (1)$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 4a + 4 & 4a + 12 \\ a^2 + 4a + 4 & 4a + 12 & 4a + 20 \\ a^2 + 8a + 16 & 4a + 20 & 4a + 28 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 4(a+1) & 4(a+3) \\ a^2 + 4a + 4 & 4(a+3) & 4(a+5) \\ a^2 + 8a + 16 & 4(a+5) & 4(a+7) \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ a^2 + 4a + 4 & a+3 & a+5 \\ a^2 + 8a + 16 & a+5 & a+7 \end{vmatrix} = \quad (2)$$

$$= 2^4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ 4(a+1) & 2 & 2 \\ 4(a+3) & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2^4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ 2(a+1) & 1 & 1 \\ 2(a+3) & 1 & 1 \end{vmatrix} = \quad (3)$$

$$= 2^6 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ 2(a+1) & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2^6 \cdot 2^2 \cdot \begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2^8 \cdot (a+1 - a-3) = 2^8 \cdot (-2) = -2^9$$

Justificativas:

- (1) 3ª coluna – 2ª coluna
2ª coluna – 1ª coluna
- (2) 3ª linha – 2ª linha
2ª linha – 1ª linha
- (3) 3ª linha – 2ª linha

303. $u^2 - 2u + 1 = 0 \Rightarrow u = 1$
Como $u = x^4$, então $x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

304. $A \cdot A^{-1} = I_3 \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det A^{-1} = -\frac{1}{2}$$

305. $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B) = (\det A) \cdot [\det(2A)] = (\det A)(2^3 \cdot \det A) =$
 $= 2^3 \cdot (\det A)^2 = \det C^{-1} \Rightarrow (\det A)^2 = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{32} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\det A)^2 = \frac{1}{2^8} \Rightarrow |\det A| = \frac{1}{16}$

306. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$$\begin{aligned}
 307. \quad & \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & a & a & b \\ 1 & a & a & a \end{vmatrix} = \\
 & = a \cdot \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ a-b & a-b & 0 \\ a-b & a-b & a-b \end{vmatrix} = a(a-b)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 308. \quad & \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 & 5 \\ 1 & x & x & 6 \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix} = \\
 & = x \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ x-1 & x-2 & 3 \\ x-1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix} = x(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & x-2 & 3 \\ 1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix} = \\
 & = x(x-1) \cdot \begin{vmatrix} x-4 & 1 \\ x-4 & x-5 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} = \\
 & = x(x-1)(x-4)(x-6) = 0 \\
 & \text{então, } S = \{0, 1, 4, 6\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 311. \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^3 & r^4 & r^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r-1 & r^2-1 & r^3-1 \\ r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 \\ r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \end{vmatrix} = \\
 & = (r-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & r+1 & r^2+r+1 \\ r+1 & r^2+r+1 & (r+1)(r^2+1) \\ r^2+r+1 & (r+1)(r^2+1) & r^4+r^3+r^2+r+1 \end{vmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= (r+1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -r & -r(r+1) \\ -r(r+1) & -r(r+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

pois no último determinante a 2ª linha é proporcional à 1ª.

313.

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{(-1)} \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3 \cdot \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{matrix} = (x-a)^3 \cdot \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3 \cdot (x+3a) = 0 \Rightarrow x = a \text{ ou } x = -3a \Rightarrow S = \{a, -3a\}$$

314.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & a & b \\ -x & -y & z & c \\ -x & -y & -z & t \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & z & t \\ -1 & 1 & a & b \\ -1 & -1 & z & c \\ -1 & -1 & -z & t \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} 2 & a+z & b+t \\ 0 & 2z & c+t \\ 0 & 0 & 2t \end{vmatrix} =$$

$$= xy \cdot 2 \cdot 2z \cdot 2t = 8xyzt$$

315.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdot & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

316.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{sen } x & \text{sen } x & \text{sen } z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen } y - \text{sen } x & \text{sen } z - \text{sen } x \\ \cos y - \cos x & \cos z - \cos x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (\sin y - \sin x)(\cos z - \cos x) - (\sin z - \sin x)(\cos y - \cos x) = \\
&= (\sin y \cdot \cos z - \sin z \cdot \cos y) + (\sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x) + \\
&+ (\sin z \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos z) = \\
&= \sin(y - z) + \sin(x - y) + \sin(z - x).
\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

317.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin b - \sin a & \cos b - \cos a \\ \sin c - \sin a & \cos c - \cos a \end{vmatrix} = \\
&= (\sin b - \sin a)(\cos c - \cos a) - (\sin c - \sin a)(\cos b - \cos a) = \\
&= \left(2 \sin \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{b+a}{2}\right) \left(-2 \sin \frac{c+a}{2} \cdot \sin \frac{c-a}{2}\right) - \\
&- \left(2 \sin \frac{c-a}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2}\right) \left(-2 \sin \frac{b+a}{2} \cdot \sin \frac{b-a}{2}\right) = \\
&= 4 \cdot \sin \frac{b-a}{2} \cdot \sin \frac{c-a}{2} \cdot \\
&\cdot \left(\sin \frac{b+a}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2} - \sin \frac{c+a}{2} \cdot \cos \frac{b+a}{2}\right) = \\
&= 4 \cdot \sin \frac{b-a}{2} \cdot \sin \frac{c-a}{2} \cdot \sin \frac{b-c}{2} = \\
&= 4 \cdot \sin \frac{b-c}{2} \cdot \sin \frac{a-c}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}
\end{aligned}$$

318.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & \cos 2a & \sin a \\ 1 & \cos 2b & \sin b \\ 1 & \cos 2c & \sin c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-2 \cdot \sin^2 a & \sin a \\ 1 & 1-2 \cdot \sin^2 b & \sin b \\ 1 & 1-2 \cdot \sin^2 c & \sin c \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 2 \cdot (\sin^2 a - \sin^2 b) & \sin b - \sin a \\ 2 \cdot (\sin^2 a - \sin^2 c) & \sin c - \sin a \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= 2 \cdot (\sin a - \sin b) \cdot (\sin a - \sin c) \cdot \begin{vmatrix} \sin a + \sin b & -1 \\ \sin a + \sin c & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (\sin a - \sin b)(\sin a - \sin c)(\sin c - \sin b)$$

319.

$$D = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 & S_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 & S_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot \begin{vmatrix} S_2 - S_1 & S_2 - S_1 & \cdots & S_2 - S_1 & S_2 - S_1 \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_3 - S_1 & S_3 - S_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_{n-1} - S_1 \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_n - S_1 \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot (S_2 - S_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & S_2 - S_1 & \cdots & S_2 - S_1 & S_2 - S_1 \\ 1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_3 - S_1 & S_3 - S_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_{n-1} - S_1 \\ 1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_n - S_1 \end{vmatrix}$$

e, assim por diante, chegamos a:

$$\begin{aligned} D &= S_1 \cdot (S_2 - S_1)(S_3 - S_2)(S_4 - S_3) \cdots (S_{n-1} - S_{n-2})(S_n - S_{n-1}) = \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n = n! \end{aligned}$$

323. $P(x) = (1 - x)(2 - x)(3 - x)(2 - 1)(3 - 1)(3 - 2)$ se anula para $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$.

325. $(\log 70 - \log 7)(\log 700 - \log 7)(\log 7000 - \log 7)(\log 700 - \log 70) \cdot (\log 7000 - \log 70)(\log 7000 - \log 700) =$

$$= \log \frac{70}{7} \cdot \log \frac{700}{7} \cdot \log \frac{7000}{7} \cdot \log \frac{700}{70} \cdot \log \frac{7000}{70} \cdot \log \frac{7000}{700} =$$

$$= \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 1000 \cdot \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 10 =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

327. $(2 - 1)(x - 1)(-5 - 1)(x - 2)(-5 - 2)(-5 - x) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(-5 - x) = 0 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -5)$
 $S = \{-5, 1, 2\}$

328. $M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Se desenvolvemos $\det M$ pela última linha, obtemos:

$$\det M = (-1)^{n+1} \cdot r_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Reiterando o processo até eliminarmos o último determinante (de ordem 2), achamos: $\det M =$

$$= (-1)^{n+1} \cdot r_1 \cdot (-1)^n \cdot r_2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot r_3 \cdots (-1)^{3+1} \cdot c_{n-2} \cdot (-1) \cdot b_{n-1} \cdot a_n =$$

$$= (-1)^{S} r_1 r_2 r_3 \cdots c_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot a_n \cdot (-1)$$

em que S é a soma dos termos da P.A. $(n + 1, n, n - 1, \dots, 4)$ que tem $n - 2$ termos; portanto:

$$S = \frac{(n-2)(n+1+4)}{2} = \frac{(n-2)(n+5)}{2}.$$

Como n é múltiplo de 4, S é ímpar e então:

$\det M = (-1)^{S+1} \cdot r_1 r_2 r_3 \dots a_n$ é positivo.

329. O cálculo do determinante de uma matriz M é feito utilizando operações de multiplicação e de adição com os elementos de M . Se os elementos de M são inteiros, então o resultado dessas operações também é inteiro.

330. Vamos usar as propriedades dos determinantes e a relação de Stifel:

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$$

para calcular o determinante D :

$$D = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+3 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p+4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$=_{(3)} \left| \begin{array}{c} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right| =$$

$$=_{(4)} \left| \begin{array}{c} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p+2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right| =$$

$$=_{(5)} \left| \begin{array}{c} 1 \quad p \quad \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 1 \quad p+1 \quad \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 1 \quad p+2 \quad \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right| =$$

$$=_{(6)} \left| \begin{array}{c} 1 \quad p \quad \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 0 \quad 1 \quad \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 0 \quad 1 \quad \begin{pmatrix} p+3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right| =$$

$$\stackrel{=}{(7)} \left| \begin{array}{c} 1 \left(\begin{array}{c} p+1 \\ 1 \end{array} \right) \\ 1 \left(\begin{array}{c} p+2 \\ 1 \end{array} \right) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & p+1 \\ 1 & p+2 \end{array} \right| = 1$$

Justificativas:

(1) 4ª linha – 3ª linha, 3ª linha – 2ª linha, 2ª linha – 1ª linha

(2) Stifel

(3) 3ª coluna – 2ª coluna, 2ª coluna – 1ª coluna

(4) Stifel

$$(5) \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = 1 \text{ e } \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) = n$$

(6) 3ª linha – 2ª linha, 2ª linha – 1ª linha

(7) Stifel

331.

$$\left| \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & c & d & a \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & a & b & c \end{array} \right| =$$

$$= (a+b+c+d) \left| \begin{array}{cccc} 1 & b & c & d \\ 1 & c & d & a \\ 1 & d & a & b \\ 1 & a & b & c \end{array} \right| \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ \textcircled{-1} \\ \textcircled{-1} \end{array} =$$

$$\begin{aligned}
&= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & c-b & d-c & a-d \\ 0 & d-c & a-d & b-a \\ 0 & a-d & b-a & c-b \end{vmatrix} = \\
&\quad \begin{matrix} \nearrow \oplus \searrow \end{matrix} \\
&= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} (a-b+c-d) & d-c & a-d \\ -(a-b+c-d) & a-d & b-a \\ (a-b+c-d) & b-a & c-b \end{vmatrix} = \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & d-c & a-d \\ -1 & a-d & a-b \\ 1 & b-a & c-b \end{vmatrix} = \\
&= -(a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & d-c & a-d \\ 1 & d-a & a-b \\ 1 & b-a & c-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \textcircled{-1} \\ \textcircled{-1} \end{matrix} \end{matrix} = \\
&= -(a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & d-c & a-d \\ 0 & c-a & -(b-d) \\ 0 & b-d & c-a \end{vmatrix} = \\
&= -(a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} c-a & -(b-d) \\ b-d & c-a \end{vmatrix} = \\
&= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)[(c-a)^2 + (b-d)^2] = \\
&= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)[(a-c)^2 + (b-d)^2]
\end{aligned}$$

332. Seja $M = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Os complementos algébricos de dois elementos situados simetricamente em relação à diagonal principal são:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \text{ e } A_{ji} = (-1)^{j+i} \cdot D_{ji}.$$

Como $D_{ij} = D_{ji}$, por se tratarem de determinantes de matrizes transpostas, então $A_{ij} = A_{ji}$.

- 333.** Chamemos de a_i o primeiro termo e de q_i a razão da P.G. colocada na linha i da matriz M . Temos:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 q_1 & a_1 q_1^2 & \dots & a_1 q_1^{n-1} \\ a_2 & a_2 q_2 & a_2 q_2^2 & \dots & a_2 q_2^{n-1} \\ a_3 & a_2 q_3 & a_3 q_3^2 & \dots & a_3 q_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n q_n & a_n q_n^2 & \dots & a_n q_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\det M = (a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & q_2^{n-1} \\ 1 & q_3 & q_3^2 & q_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q_n & q_n^2 & q_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 a_2 a_3 \dots a_n) (q_2 - q_1)(q_3 - q_1) \dots (q_n - q_{n-1})$$

então:

$$\det M = 0 \Leftrightarrow (\exists i, j \mid q_i = q_j).$$

334.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & -2 & -2 & \dots & n-4 \end{vmatrix} =$$

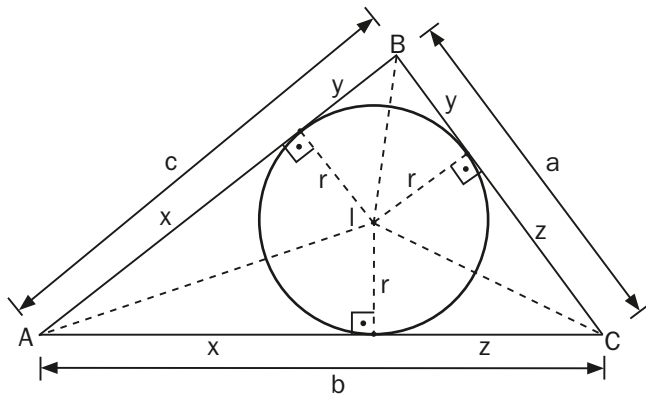
$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -2 & -2 & -2 & \dots & n-4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(n-2)!$$

335. Temos que provar a identidade:

$$(b - c) \cdot \cotg \frac{A}{2} + (c - a) \cdot \cotg \frac{B}{2} + (a - b) \cdot \cotg \frac{C}{2} = 0.$$

Consideremos a circunferência inscrita no triângulo ABC (figura a seguir). Seu centro I é o ponto de interseção das bissetrizes internas, então:



$$\begin{cases} \cotg \frac{A}{2} = \frac{x}{r} \\ \cotg \frac{B}{2} = \frac{y}{r} \\ \cotg \frac{C}{2} = \frac{z}{r} \end{cases}$$

e daí

$$\begin{cases} a = y + z = r \cdot \left(\cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} \right) \\ b = x + z = r \cdot \left(\cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{C}{2} \right) \\ c = x + y = r \cdot \left(\cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} \right) \end{cases}$$

Calculando cada cotangente nesse sistema, vem:

$$\cotg \frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)-2a}{2r} = \frac{p-a}{r}, \quad \cotg \frac{B}{2} = \frac{p-b}{r}, \quad \cotg \frac{C}{2} = \frac{p-c}{r}$$

em que $a + b + c = 2p$.

Temos, então:

$$\begin{aligned} & (b-c) \cdot \cotg \frac{A}{2} + (c-a) \cdot \cotg \frac{B}{2} + (a-b) \cdot \cotg \frac{C}{2} = \\ &= \frac{1}{r} \cdot [(b-c)(p-a) + (c-a)(p-b) + (a-b)(p-c)] = \\ &= \frac{1}{r} [p(b-c+c-a+a-b) + a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)] = 0 \end{aligned}$$

336. $6 \cdot (6 \text{ determinantes de } 5^{\text{a}} \text{ ordem}) =$
 $= 6 \cdot 5 \cdot (5 \text{ determinantes de } 4^{\text{a}} \text{ ordem}) =$
 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (4 \text{ determinantes de } 3^{\text{a}} \text{ ordem}) =$
 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (3 \text{ determinantes de } 2^{\text{a}} \text{ ordem}) =$
 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \text{ termos}) = 6! = 720 \text{ termos}$

337.
$$\begin{vmatrix} \frac{m!}{(m-2)!} & \frac{m!}{(m-1)!} & 1 \\ \frac{m!}{2!(m-2)!} & m & 6 \\ m(m-1) & \frac{m!}{(m-1)!} & 0 \end{vmatrix} = -10m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m(m-1) & m & 1 \\ \frac{m(m-1)}{2} & m & 6 \\ m(m-1) & m & 0 \end{vmatrix} = -10m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2(m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10 \quad m \Rightarrow m(m-1) \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m(m-1)}{-2} = -10 \Rightarrow m^2 - m - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ \text{ou} \\ m = -4 \text{ (rejeitado)} \end{cases}$$

338. Seja M uma matriz antissimétrica de ordem $2n - 1$ (ímpar). Por ser antissimétrica, $M = -M^t$.

Então:

$$\det M = \det (-M^t) = (-1)^{2n-1} \cdot \det M^t = -\det M^t = -\det M$$

e daí

$$2 \cdot \det M = 0$$

portanto:

$$\det M = 0.$$

CAPÍTULO VI — Sistemas lineares

357. Admitindo que $-3t - 1 \neq 0$, $z - 2t \neq 0$, $t - y \neq 0$ e $2z - y \neq 0$, temos:

$$\frac{x+2y}{-3t-1} = 1 \Rightarrow x+2y+3t = -1$$

$$\frac{2x-y}{z-2t} = 1 \Rightarrow 2x-y-z+2t = 0$$

$$\frac{x-2z}{t-y} = 2 \Rightarrow x+2y-2z-2t = 0$$

$$\frac{3t-1}{2z-y} = 2 \Rightarrow 2y - 4z + 3t = 1$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3t = -1 \\ 2x - y - z + 2t = 0 \\ x + 2y - 2z - 2t = 0 \\ 2y - 4z + 3t = 1 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 124 \text{ e}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -36 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-36}{124} = \frac{-9}{31}$$

358. Fazendo $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ e $\frac{1}{z} = z'$, temos:

$$\begin{cases} 2x' - y' - z' = -1 \\ x' + y' + z' = 0 \\ 3x' - 2y' + z' = 4 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_{x'} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x' = \frac{D_{x'}}{D} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3} \Rightarrow x = -3$$

$$D_{y'} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow y' = \frac{D_{y'}}{D} = \frac{-14}{9} \Rightarrow y = -\frac{9}{14}$$

$$D_{z'} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 17 \Rightarrow z' = \frac{D_{z'}}{D} = \frac{17}{9} \Rightarrow z = \frac{9}{17}$$

$$S = \left\{ \left(-3, -\frac{9}{14}, \frac{9}{17} \right) \right\}.$$

$$360. \quad D = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & -\cos a \\ \cos a & \operatorname{sen} a \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -\cos 2a & -\cos a \\ \operatorname{sen} 2a & \operatorname{sen} a \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} a \cdot \cos 2a + \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a =$$

$$= \operatorname{sen} (2a - a) = \operatorname{sen} a$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & -\cos 2a \\ \cos a & \operatorname{sen} 2a \end{vmatrix} = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} 2a + \cos a \cdot \cos 2a =$$

$$= \cos (2a - a) = \cos a$$

$$\text{Assim: } \left. \begin{array}{l} x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \operatorname{sen} a \\ y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \cos a \end{array} \right\} \Rightarrow S = \{(\operatorname{sen} a, \cos a)\}$$

$$361. \quad D = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ a+1 & 2b \end{vmatrix} = b(a-3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 5 & 2b \end{vmatrix} = -3b \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \frac{3}{3-a} \Bigg|_{x=1} \Rightarrow a=0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a+1 & 5 \end{vmatrix} = 2(2a-3) \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \frac{2(2a-3)}{b(a-3)} \Bigg|_{\substack{y=2 \\ a=0}} \Rightarrow b=1$$

$$362. \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 28-z & 1 \\ 32 & -1 \end{vmatrix} = z-60 \Rightarrow x = \frac{z-60}{-3}$$

Como $x > 0$ e $z > 0$, vem: $0 < z < 60$ (1)

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 28-z \\ 2 & 32 \end{vmatrix} = 2z - 24 \Rightarrow y = \frac{2z-24}{-3} \Rightarrow z = \frac{3y-24}{-2} \quad (2)$$

De (1) e (2), vem: $0 < \frac{3y-24}{-3} < 60 \Rightarrow 0 < y < 8$ (3)

Mas $2x - y = 32 \Rightarrow y = 2x - 32$ (4)

De (3) e (4), vem: $0 < 2x - 32 < 8 \Rightarrow 16 < x < 20$

Então, as condições são: $16 < x < 20$, $0 < y < 8$ e $0 < z < 60$.

367.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = -1 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \times 3 \\ \times -2 \end{smallmatrix}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 3 \\ -5y = -10 \\ -5y = -10 \end{cases}$$

Somamos e substituímos a 2ª equação multiplicada por -2 com a 3ª equação multiplicada por 3. Do mesmo modo, somamos e substituímos a 3ª equação multiplicada por 3 com a 2ª equação multiplicada por -2 .

A 2ª e a 3ª linhas do sistema são a mesma equação e, então, podemos suprimir uma delas:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 5y = 10 \Rightarrow y = 2 \text{ e, portanto, } x = 3 - y \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$S = \{(1, 2)\}$, sistema possível determinado.

368.

$$\text{b) } \begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3t = 2 \\ x - 2y + z - 2t = 0 \end{cases} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \times -2 \\ \oplus \end{smallmatrix}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ y - 4z + 3t = 4 \\ -y - z - 2t = 1 \end{cases} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \oplus \end{smallmatrix}]{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 2z = 1 & (1) \\ y - 4z + 3t = 4 & (2) \\ -5z - t = 5 & (3) \end{cases}$$

Em (3), fazendo $z = \alpha$, vem: $-5\alpha + t = 5 \Rightarrow t = 5 + 5\alpha$.

Em (2), substituindo z e t , temos:

$$y - 4\alpha + 3(5 + 5\alpha) = 4 \Rightarrow y = -11 - 11\alpha$$

Em (1), substituindo y e z , temos:

$$-x + (-11 - 11\alpha) - 2\alpha = 1 \Rightarrow x = -12 - 13\alpha$$

O sistema é possível e indeterminado:

$$S = \{(-12 - 13\alpha, -11 - 11\alpha, \alpha, 5 + 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$$c) \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 & (\times -3) \\ 3x + 5y + 4z = 4 & (+) \\ 5x + 3y + 4z = -10 & (+) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -2 \\ -4y - 2z = -2 & (\times -3) \\ -12y - 6z = -20 & (+) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 \\ 0 + 0 = -14 \text{ (falso)} \end{cases}$$

O sistema é impossível. Então, $S = \emptyset$.

375.

$$\begin{cases} (2a-1)^2 x + (4a^2-1)y = (2a+1)^2 & (\times \frac{-(2a+1)}{2a-1}) \\ (4a^2-1)x + (2a+1)y = (4a^2-1) & (+) \end{cases} \Leftrightarrow \left(\text{se } a \neq \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)^2 x + (4a^2-1)y = (2a+1)^2 \\ (2a+1)(-2a)y = \frac{(-8a)(2a+1)}{2a-1} \end{cases} \Leftrightarrow \left(a \neq 0 \text{ e } a \neq -\frac{1}{2} \right) y = \frac{4}{2a-1}$$

Portanto, se $a \neq \frac{1}{2}$, $a \neq 0$ e $a \neq -\frac{1}{2}$, o sistema é possível e determinado.

Analisando as outras possibilidades, temos:

1) Se $a = \frac{1}{2}$, o sistema é impossível, porque na primeira equação teremos $0x + 0y = 4$, que é falso.

2) Se $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (sistema possível e indeterminado)

3) Se $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 0x = 0 \end{cases}$ (sistema possível e indeterminado)

376.
$$\begin{cases} x + y = a \\ a^2x + y = a \end{cases} \xrightarrow{\text{⊖}} \begin{cases} x + y = a \\ (1 - a^2)y = a(1 - a^2) \end{cases}$$

1) Se $1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$, então $0y = 0$, sistema possível e indeterminado.

2) Se $a \neq 1$ e $a \neq -1$, $y = a$ e $x = 0$, sistema possível e determinado.

3) Não há valores para a que tornem o sistema impossível.

377.
$$\begin{cases} mx + y = 1 - m \\ x + my = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{⊖}} \begin{cases} mx + y = 1 - m \\ (1 - m^2)y = 1 - m \end{cases}$$

Se $1 - m^2 \neq 0$, ou seja, $m \neq 1$ e $m \neq -1$, então o sistema é possível

e determinado e $S = \left\{ \left(-\frac{m}{m+1}, \frac{1}{m+1} \right) \right\}$.

Se $m = 1$, o sistema fica $\begin{cases} x + y = 0 \\ 0y = 0 \end{cases}$, então o sistema é possível e indeterminado e $S = \{(-\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Se $m = -1$, o sistema fica $\begin{cases} x - y = 0 \\ 0y = -2 \end{cases}$, então o sistema é impossível e $S = \emptyset$.

378.
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + ay = b \end{cases} \xrightarrow{\times -3} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ (a-6)y = (b-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ (a-6)y = (b-3) \end{cases}$$

- 1) Se $a - 6 = 0$ e $b - 3 = 0$, isto é, se $a = 6$ e $b = 3$, $0y = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ sistema possível e indeterminado.
- 2) Se $a = 6$ e $b \neq 3$, temos $0y = b - 3$, sistema impossível.
- 3) Se $a \neq 6$, $\forall b \in \mathbb{R}$, sistema possível e determinado.

379.
$$\begin{cases} x + 2y = b \\ 2ax + 3y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\times -2a} \begin{cases} x + 2y = b \\ (3-4a)y = 1-2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = b \\ (3-4a)y = 1-2ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = b \\ (4a-3)y = 2ab-1 \end{cases}$$

- 1) Se $4a - 3 = 0$ e $2ab - 1 = 0$, isto é, se $a = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{1}{2a} = \frac{2}{3}$,
 sistema possível e indeterminado.

Fazendo $y = \alpha$, então $x = \frac{2}{3} - 2\alpha \Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{2}{3} - 2\alpha, \alpha \right) \right\}$.

- 2) Se $a \neq \frac{3}{4}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, sistema possível e determinado.

Então, $y = \frac{2ab-1}{4a-3} \Rightarrow x = \frac{2-3b}{4a-3} \Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{2-3b}{4a-3}, \frac{2ab-1}{4a-3} \right) \right\}$.

- 3) Se $a = \frac{3}{4}$ e $b \neq \frac{2}{3}$, sistema impossível.

380.
$$\begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \\ mx + 4y + (m-1)z = 3 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times -m \\ \oplus \end{matrix}} \begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \\ (4-m^2)y + (m^2+2m-1)z = 3-m \end{cases}$$

Como o número de equações é menor que o número de incógnitas, o sistema é possível e indeterminado, $\forall m, m \in \mathbb{R}$ (sistema compatível).

381.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ mx + y = 1 \\ x - y = m \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times -m \\ \times -1 \\ \oplus \end{matrix}} \begin{cases} x + y = 2 \\ (-m+1)y = -2m+1 \\ -2y = -2+m \end{cases}$$

Na 3ª equação, se $m = 0$, vem $y = 1$

Então, temos $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$; sistema possível e determinado e

$$S = \{(1, 1)\}.$$

Na 2ª Equação, se $-m + 1 = 0$, isto é, se $m = 1$, temos

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2y = -2 + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{sistema possível e determinado}$$

$$\text{e } S = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Se $m \neq 0$ e $m \neq 1$, o sistema é indeterminado.

382.
$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times \frac{-p}{a} \\ \oplus \end{matrix}} \begin{cases} ax + by = c \\ (-bp + aq)y = -cp + ad = 0 \end{cases}$$

O sistema é indeterminado se $-bp + aq = 0$ e $-cp + ad = 0$.

$$\text{Então, vem } \begin{cases} -bp + aq = 0 \\ -cp + ad = 0 \Rightarrow p = \frac{ad}{c} \end{cases}$$

Substituindo $p = \frac{ad}{c}$ na 1ª equação, vem: $q = \frac{bd}{c}$.

383. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x - y = m \\ x + y = 2 \end{cases}$$

encontramos $x = \frac{m+2}{2}$ e $y = \frac{2-m}{2}$, que, substituídos na equação

$mx + y = 2$, conduzem à equação $m^2 + m = 0$, que é satisfeita se $m \in \{1, -2\}$.

Conclusão:

$m = 1$ sistema possível e determinado, com $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$

$m = -2 \Rightarrow$ sistema possível e determinado, com $x = 0$ e $y = 2$

$m \neq 1$ e $m \neq -2 \Rightarrow$ sistema impossível

384.

$$\begin{cases} 6x + ay = 12 \\ 4x + 4y = b \end{cases} \xrightarrow{\left(\times -\frac{2}{3} \right) \oplus} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + ay = 12 \\ \left(4 - \frac{2a}{3} \right) y = b - 8 \end{cases}$$

O sistema será indeterminado somente se $4 - \frac{2a}{3} = 0$ e $b - 8 = 0$, ou seja, se $a = 6$ e $b = 8$.

394.

$$\begin{cases} mx - y + mz = m \\ 2x + mz = 3 \\ mx + my = 2 \end{cases} \Rightarrow D = m^2(1 - m)$$

$$1) \text{ Se } D \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \text{e} \\ m \neq 1 \end{cases} \quad (\text{sistema possível e determinado})$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 3 & 0 & m \\ 2 & m & 0 \end{vmatrix} = -m(m-1)(m-2) \Rightarrow x = \frac{m-2}{m}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m & m \\ 2 & 3 & m \\ m & 2 & 0 \end{vmatrix} = m(m-4)(m-1) \Rightarrow y = \frac{4-m}{m}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 2 & 0 & 3 \\ m & m & 2 \end{vmatrix} = -(m-1)(m+4) \Rightarrow z = \frac{m+4}{m^2}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{m-2}{m}, \frac{4-m}{m}, \frac{m+4}{m^2} \right) \right\}$$

$$2) \text{ Se } m = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0x - y + 0z = 0 \\ 2x + 0z = 3 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema impossível}$$

$$3) \text{ Se } m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{x-2} & \textcircled{x-1} \\ \oplus & \oplus \end{matrix}} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{(z=\alpha)} y = \frac{\alpha+1}{2} \text{ e, então, } x = \frac{3-\alpha}{2}$$

$$\text{sistema possível indeterminado} \Rightarrow S = \left\{ \left(\frac{3-\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

395. $D = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & -1 & m \\ 1 & -m & 1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1)$

1) Se $D \neq 0$, então $m \neq 1$ e $m \neq -1 \Rightarrow$ sistema possível e determinado.

$$D_x = \begin{vmatrix} m & m & m \\ 0 & -1 & m \\ m & -m & 1 \end{vmatrix} = m(2m - 1)(m - 1) \Rightarrow x = \frac{m(2m - 1)}{m + 1}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 0 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m(m-1) \Rightarrow y = \frac{m}{m+1}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -m & m \end{vmatrix} = -2m^2 \Rightarrow z = \frac{2m^2}{1-m^2}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{m(2m-1)}{m+1}, \frac{m}{m+1}, \frac{2m^2}{1-m^2} \right) \right\}.$$

2) Se $D = 0$, suponhamos $m = 1$:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases} \begin{matrix} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y=-1 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema indeterminado}$$

3) Se $D = 0$, seja $m = -1$:

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ x - y - z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \begin{matrix} \text{ } \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{cases} x - y - z = -1 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \text{ (falso)} \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{sistema} \\ \text{indeterminado} \end{matrix}$$

397.
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + az = 0 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \swarrow \searrow \\ \swarrow \searrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -y + (a-4)z = 0 \\ -2y - 5z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \textcircled{-2} \\ \swarrow \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -y + (a-4)z = 0 \\ (-2a+3)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{então, sistema possível indeterminado} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

398.
$$D = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 4x - 2z = 2 \\ -4y + 3z = 1 \\ -3x + 2y = 3 - k \end{cases} \begin{matrix} \textcircled{\times \frac{3}{4}} \\ \oplus \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ -4y + 3z = 1 \\ 2y - \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} - k \end{cases} \begin{matrix} \textcircled{\times \frac{1}{2}} \\ \oplus \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ -4y + 3z = 1 \\ 0z = 5 - k \end{cases}$$

Conclusão: Temos sistema possível indeterminado somente se $5 - k = 0$, ou seja, se $k = 5$.

399. a)
$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 4x + 10y + 2z = 5 \\ 6x + 15y - z = k \end{cases} \xrightarrow[\oplus]{\begin{matrix} \times - 2 \\ \times - 3 \end{matrix}} \begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 8z = 3 \\ 8z = k - 3 \end{cases}$$

O sistema tem solução (é possível) se $k - 3 = 3$, ou seja, $k = 6$.

b) Resolvendo o sistema, vem:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 8z = 3 \Rightarrow z = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Fazendo $y = \alpha$, na 1ª equação, temos:

$$2x + 5\alpha - \frac{9}{8} = 1 \Rightarrow x = \frac{17 - 40\alpha}{16}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{17 - 40\alpha}{16}, \alpha, \frac{3}{8} \right), \forall \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

401.
$$D = \begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ m-1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 2m^3 - 6m^2 + 6m =$$

$$= 2m(m^2 - 3m + 3)$$

$D = 0 \Leftrightarrow m = 0$, considerando que $m^2 - 3m + 3 > 0, \forall m, m \in \mathbb{R}$.
Portanto, $\forall m, m \in \mathbb{R}^*, D \neq 0$ e o sistema é determinado.

402.
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -m \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10m + 6$$

$$D \neq 0 \text{ (sistema determinado)} \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{5}$$

Então, será indeterminado se $m = \frac{3}{5}$.

$$\begin{cases} x + 2y - \frac{3}{5}z = -1 \\ 3x - y + z = 4 \\ -2x + 4y - 2z = k \end{cases}$$

Diagram showing row operations: $\times -3$ and $\times 2$ are circled with arrows pointing to the first and second rows respectively, and a $\oplus$ symbol indicates the third row is the sum of the first and second rows.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - \frac{3}{5}z = -1 \\ -7y + \frac{14}{5}z = 7 \\ 8y - \frac{16}{5}z = k - 2 \end{cases}$$

Diagram showing row operations: $\times \frac{8}{7}$ is circled with an arrow pointing to the third row, and a $\oplus$ symbol indicates the third row is the sum of the second and third rows.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - \frac{3}{5}z = -1 \\ -y + \frac{2}{5}z = 1 \\ 0z = k + 6 \end{cases}$$

O sistema será indeterminado se $k + 6 = 0 \Rightarrow k = -6$.

Então, $m = \frac{3}{5}$ e $k = -6$.

403. $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -a \\ a & -a & 6 \end{vmatrix} = (a + 6)(a - 3)$

1) sistema possível e determinado $\Leftrightarrow D \neq 0 \Rightarrow a \neq -6$ e $a \neq 3$

2) Se $a = -6$:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -6 \\ -x + 2y + 6z = b \\ -6x + 6y + 6z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6z = -b \\ 2x - y + 3z = -6 \\ 3x - 3y - 3z = -1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times -2 \\ \times -3 \end{matrix}} \begin{cases} x - 2y - 6z = -b \\ 2x - y + 3z = -6 \\ 3x - 3y - 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6z = -b \\ 3y + 15z = 2b - 6 \\ 3y + 15z = 3b - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ sistema possível e indeterminado } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2b - 6 = 3b - 1 \Rightarrow b = -5$$

E, então, sistema impossível se $a = -6$ e $b \neq -5$.

3) Se $a = 3$:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ -x + 2y - 3z = b \\ 3x - 3y + 6z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = -b \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x - 3y + 6z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times -2 \\ \times -3 \end{matrix}} \begin{cases} x - 2y + 3z = -b \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x - 3y + 6z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -b \\ 3y - 3z = 2b + 3 \\ 3y - 3z = 3b + 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ sistema possível e indeterminado } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2b + 3 = 3b + 2 \Rightarrow b = 1$$

E, então, sistema impossível se $a = 3$ e $b \neq 1$.

404. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

Então, o sistema é possível e determinado, quaisquer que sejam a , b e c reais.

$$408. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5 \text{ e } \lambda_2 = -1 \text{ e, portanto, } \lambda_1 + \lambda_2 = 4.$$

$$409. \quad \begin{cases} x + 5y = \lambda x \\ 2x - y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 5y = 0 \\ 2x - (1 + \lambda)y = 0 \end{cases} \begin{matrix} \times \frac{-2}{1 - \lambda} \\ \oplus \end{matrix} \begin{matrix} (\lambda \neq 1) \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 5y = 0 \\ \frac{\lambda^2 - 11}{1 - \lambda}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 11 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{11}$$

$$415. \quad \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 2m$$

$$6 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3 \text{ e, então, } \begin{cases} m \neq 3, \text{ sistema determinado} \\ m = 3, \text{ sistema indeterminado} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \\ m^2 & 9 & 25 \end{vmatrix} = (3 - m)(5 - m)(5 - 3) = 2(m - 3)(m - 5)$$

Se $m \neq 3$ e $m \neq 5$, sistema determinado.

Se $m = 3$ e $m = 5$, sistema indeterminado.

416.
$$\begin{cases} kx + ky + z = 0 \\ x + ky + kz = 0 \\ kx + y + kz = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & k & k \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = 2k^3 - 3k^2 + 1 = (k-1)(k-1)(2k+1)$$

Portanto, para $k \neq 1$ e $k \neq -\frac{1}{2}$, sistema determinado e para $k = 1$

ou $k = -\frac{1}{2}$, sistema indeterminado.

417.
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2m & 3 \\ 2 & 6 & -4m \end{vmatrix} = 8m^2 + 20m + 12$$

$$D = 0 \Rightarrow 8m^2 + 20m + 12 = 0 \Rightarrow m = -1 \text{ ou } m = -\frac{3}{2}$$

1) Se $m \neq -1$ e $m \neq -\frac{3}{2}$, sistema determinado.

2) Se $m = -1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 6y + 4z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\oplus]{\begin{matrix} \times -4 & \times -2 \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{(z=\alpha)} y = -\frac{\alpha}{2}$$

e, então, $x = -\frac{\alpha}{2}$.

Portanto, $S = \left\{ \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

3) Se $m = \frac{-3}{2}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = 0 \\ 2x + 6y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \textcircled{x-4} \\ \oplus \\ \textcircled{x-1} \\ \oplus \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \stackrel{(z=\alpha)}{\Rightarrow} y = -\alpha$$

e, então, $x = 0$

Portanto, $S = \{(0, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

419.

$$\begin{cases} kx + 2y + z = 0 \\ -2kx - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ -2k & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 9k + 14 \Rightarrow 9k + 14 = 0 \Rightarrow k = -\frac{14}{9}$$

$$\begin{cases} -\frac{14}{9}x + 2y + z = 0 \\ \frac{28}{9}x - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ -14x + 18y + 9z = 0 \\ 28x - 9y + 27z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \textcircled{\times 7} \\ \oplus \\ \textcircled{\times -14} \\ \oplus \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ -3y - 5z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \stackrel{(z=\alpha)}{\Rightarrow} y = -\frac{5\alpha}{3}$$

e, então, $x = -\frac{3\alpha}{2}$.

$$S = \left\{ \left(-\frac{3\alpha}{2}, -\frac{5\alpha}{3}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$423. \quad D = \begin{vmatrix} -(m+1)^3 & (-m-1)^2 & (-m-1) & 1 \\ -(m+2)^3 & (-m-2)^2 & (-m-2) & 1 \\ (m+1)^3 & (m+1)^2 & (m+1) & 1 \\ (m^2+1)^3 & (m^2+1)^2 & (m^2+1) & 1 \end{vmatrix}$$

Considerando que $-(m+1)^3 = (-m-1)^3$ e $-(-m-2)^3$, então D é determinante de Vandermonde.

$$D = [(-m-2) - (-m-1)] \cdot [(m+1) - (-m-1)] \cdot [(m+1) - (-m-2)] \cdot [(m^2+1) - (-m-1)] \cdot [(m^2+1) - (-m-2)] \cdot [(m^2+1) - (m+1)] \Rightarrow D = [-1] \cdot [2m+2] \cdot [2m+3] \cdot [m^2+m+2] \cdot [m^2+m+3] \cdot [m^2-m]$$

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2 = 0 \Rightarrow m = -1 \\ \text{ou} \\ 2m+3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ m^2-m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1 \end{cases}$$

porque $m^2 + m + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ e $m^2 + m + 3 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Portanto, $m \in \left\{ -\frac{3}{2}, -1, 0, 1 \right\}$.

$$428. \quad D = \begin{vmatrix} (\sin \alpha - 1) & 2 & -\sin \alpha \\ 0 & 3 \sin \alpha & 4 \\ 3 & 7 \sin \alpha & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \sin^2 \alpha - 10 \sin \alpha - 24 = 0$$

Então, $\sin \alpha = 12$ ou $\sin \alpha = -2$.

Ambas as soluções rejeitadas porque $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ e, portanto, não existem valores α que satisfaçam a condição do problema.

430. b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times -1 \\ \oplus \end{matrix}} A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

característica = 3

431. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A característica é 2, porque a 3ª linha é igual à soma das duas primeiras.

433. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times -1 \\ \oplus \\ \times -a \\ \oplus \end{matrix}} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & -(a-1) & (a-1) \\ 0 & -(a-1) & -(a+1)(a-1) & a(a-1) \end{bmatrix}$

Se $a \neq 1$, $p = 3$

Se $a = 1$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $p = 1$.

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times -1 \\ \oplus \end{matrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-2 & a^2-4 & a^3-8 \end{bmatrix}$$

Se $a \neq 2$, $\rho = 3$.

Se $a = 2$, $\rho = 2$.

Ou, ainda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-2 & a^2-4 & a^3-8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times -1 \\ \oplus \end{matrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-3 & a^2-9 & a^3-27 \end{bmatrix}$$

Se $a \neq 3$, $\rho = 3$.

Se $a = 3$, $\rho = 2$.

Em síntese: $\begin{cases} \text{Se } a \neq 2 \text{ e } a \neq 3, \rho = 3. \\ \text{Se } a = 2 \text{ ou } a = 3, \rho = 2. \end{cases}$

438.

$$a) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & -3 & -3 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -6 & | & -8 \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = \rho(B) = 3 = n \Rightarrow$ sistema possível e determinado

Portanto:

$$-6z = -8 \Rightarrow z = \frac{4}{3}$$

$$y - z = -2 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$$

$$x + y + 2z = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \left\{ \left(1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right) \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3 \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado}$$

Fazendo $z = \alpha$, vem:

$$-y + 3\alpha = 0 \Rightarrow y = 3\alpha - 1$$

$$-x - y + z = 0 \Rightarrow x = 1 - 2\alpha$$

$$S = \{(1 - 2\alpha, 3\alpha - 1, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

439.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right] \sim \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 4 \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado}$$

$$\text{b) } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right]$$

$$\rho(A) \neq \rho(B) \Rightarrow \text{sistema impossível}$$

$$c) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho(B) = 3 = n \Rightarrow$ sistema possível e determinado

$$d) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < n \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado

$$e) \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3 \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado

$$f) \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right]$$

$\rho(A) \neq \rho(B) \Rightarrow$ sistema impossível

440. $B = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a^2 \\ 2 & 2 & (3-a) & b^2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2 - 1 & 0 & a^2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 - a & b^2 - 2 \end{array} \right]$

- a) Para $a \neq 1$, temos $p(A) = p(B) = 3$ e sistema possível e determinado.
- b) Para $a = 1$ e $b \neq \sqrt{2}$ e $b \neq -\sqrt{2}$, temos $p(A) = p(B) = 2$ e sistema possível e indeterminado, com indeterminação simples.
- c) Para $a = 1$ e $b = \pm\sqrt{2}$, temos $p(A) = p(B) = 1$ e sistema possível e indeterminado, com dupla indeterminação.

442.

$$\begin{aligned}
 D &= \left| \begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ad+bd & ab+ac+bc \\ bcd & acd & abd & abc \end{array} \right| = \\
 &= \left| \begin{array}{ccc} a-b & a-c & a-d \\ (a-b)(c+d) & (a-c)(b+d) & (a-d)(b+c) \\ (a-b)cd & (a-c)bd & (a-d)bc \end{array} \right| = \\
 &= (a-b)(a-c)(a-d) \cdot \left| \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline c+d & b+d & b+c \\ cd & bd & bc \end{array} \right| = \\
 &= (a-b)(a-c)(a-d) \cdot \left| \begin{array}{cc} b-c & b-d \\ (b-c)d & (b-d)c \end{array} \right| = \\
 &= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \\
 D_3 &= \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline b+c+d & a+c+d & 0 & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & 0 & ab+ac+bc \\ bcd & acd & B & abc \end{array} \right| = \\
 &= -B \left| \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline b+c+d & a+c+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ac+bc \end{array} \right| = \\
 &= -B \left| \begin{array}{cc} a-b & a-d \\ (a-b)(c+d) & (a-d)(b+c) \end{array} \right| = -B(a-b)(a-d)(b-d)
 \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-B}{(a-c)(b-c)(c-d)}$$

- 443.** O segundo sistema deve ter uma única solução ($x = 1$ e $y = 1$). Notemos que $(1, 1)$ é solução do segundo sistema, qualquer que seja a . Para que não exista outra solução, a condição é

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ ou seja, } a \neq 1.$$

444.
$$\begin{cases} 2^{x+y+z} = 2^3 \\ 3^{x+z} = 3^{9+2y} \\ 5^{3+x} = 5^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 9 \\ x - z = -3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array} \right]$$

$$\text{Então: } -2z = -8 \Rightarrow z = 4$$

$$-3y = 6 \Rightarrow y = -2$$

$$x + y + z = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \{(1, -2, 4)\}.$$

445.
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \cos^2 C & -\cos A - \cos B \cdot \cos C \\ -\cos A - \cos B \cdot \cos C & 1 - \cos^2 B \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - \cos^2 C)(1 - \cos^2 B) - (\cos A + \cos B \cdot \cos C)^2 =$$

$$= 1 - \cos^2 B - \cos^2 C - \cos^2 A - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$$

pois para ângulos de um triângulo vale a relação

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ (conforme se prova no volume 3 desta coleção).

Sendo $D = 0$, o sistema linear homogêneo dado é indeterminado.

Fazendo $z = \alpha$, temos:

$$\begin{cases} x - y \cdot \cos C = \alpha \cdot \cos B \\ -x \cdot \cos C + y = \alpha \cdot \cos A \end{cases}$$

em que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C \\ -\cos C & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 C = \sin^2 C$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha \cdot \cos B & -\cos C \\ \alpha \cdot \cos A & 1 \end{vmatrix} = \alpha \cdot (\cos B + \cos A \cdot \cos C)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \cdot \cos B \\ -\cos C & \alpha \cdot \cos A \end{vmatrix} = \alpha \cdot (\cos A + \cos B \cdot \cos C)$$

e daí:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\alpha(\cos B + \cos A \cdot \cos C)}{\sin^2 C}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{\alpha(\cos A + \cos B \cdot \cos C)}{\sin^2 C}$$

446.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array} \right]$$

$$\text{Então: } -4z = -2 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$-2y = -1 \Rightarrow -y = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 - y - z \Rightarrow x = 0$$

Então, $S = \emptyset$, porque $\log_3 x$ deve ter $x > 0$.

447. Vamos atribuir à variável a três valores distintos: a_1, a_2 e a_3

$$\begin{cases} x + a_1 y = 1 - a_1^2 \\ x + a_2 y = 1 - a_2^2 \\ x + a_3 y = 1 - a_3^2 \end{cases}$$

Tomando duas a duas, temos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & 1 - a_1^2 \\ 1 & a_2 & 1 - a_2^2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1 - a_1^2) \\ 0 & a_2 - a_1 & a_1^2 - a_2^2 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1 - a_1^2) \\ 0 & 1 & a_1 - a_2 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{((1 + a_1 a_2); -(a_1 + a_2))\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1 - a_1^2) \\ 1 & a_3 & (1 - a_3^2) \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1 - a_1^2) \\ 0 & 1 & -(a_1 + a_3) \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{((1 + a_1 a_3); -(a_1 + a_3))\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_2 & (1 - a_2^2) \\ 1 & a_3 & (1 - a_3^2) \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_2 & (1 - a_2^2) \\ 0 & 1 & -(a_2 - a_3) \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{((1 + a_2 a_3); -(a_2 + a_3))\}$$

Verifica-se que as retas encontram-se duas a duas.

Tomando as três retas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & 1 - a_1^2 \\ 1 & a_2 & 1 - a_2^2 \\ 1 & a_3 & 1 - a_3^2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1 - a_1^2) \\ 0 & (a_2 - a_1) & (a_1^2 - a_2^2) \\ 0 & (a_3 - a_1) & (a_1^2 - a_3^2) \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{c|cc} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 0 & 1 & -(a_1+a_2) \\ 0 & 1 & -(a_1+a_3) \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c|cc} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 0 & 1 & -(a_1-a_2) \\ 0 & 0 & a_2-a_3 \end{array} \right]$$

em que se verifica que $\rho(A) \neq \rho(B)$, o que significa que o sistema é impossível, ou seja, as três retas não têm um ponto em comum.

448. Chamemos de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}$ os valores de x que anulam $P(x)$. Calculemos os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ de $P(x)$. Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^n a_0 + \alpha_1^{n-1} a_1 + \dots + \alpha_1 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \alpha_2^n a_0 + \alpha_2^{n-1} a_1 + \dots + \alpha_2 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \alpha_3^n a_0 + \alpha_3^{n-1} a_1 + \dots + \alpha_3 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1}^n a_0 + \alpha_{n+1}^{n-1} a_1 + \dots + \alpha_{n+1} a_{n-1} + a_n = 0 \end{array} \right.$$

O determinante D desse sistema é um determinante de Vandermonde cujos elementos característicos são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}$, então:

$$D = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$D \neq 0 \text{ (pois } \alpha_j \neq \alpha_i, \forall_j \forall_i).$$

Logo, o sistema só admite a solução trivial $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$; portanto, $P(x) \equiv 0$.

449. Fazendo $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, temos:

$$\begin{aligned} P(1-x) &= a(1-x)^4 + b(1-x)^3 + c(1-x)^2 + d(1-x) + e = \\ &= ax^4 - (4a+b)x^3 + (6a+3b+c)x^2 - (4a+3b+2c+d)x + \\ &\quad + (a+b+c+d+e). \end{aligned}$$

Impondo $P(x) = P(1 - x)$, vem:

$$\sim \begin{cases} 4a + b = -b \\ 6a + 3b + c = c \\ 4a + 3b + 2c + d = -d \\ a + b + c + d + e = e \end{cases} \sim \begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 6a + 3b = 0 \\ 4a + 3b + 2c + 2d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{equivalentes} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 4a + 3b + 2c + 2d = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 2d = 0 \\ 2b + 4c + 4d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 2d = 0 \end{cases}$$

E daí temos $a = c + d$, $b = -(2c + 2d)$, sendo c , d , e quaisquer.

Então: $P(x) = (c + d)x^4 - (2c + 2d)x^3 + cx^2 + dx + e$

Fazendo $c + d = a$, temos:

$$P(x) = ax^4 - 2ax^3 + cx^2 + (a - c)x + e.$$

- 450.** O sistema admite a solução trivial se, e somente se, o determinante dos coeficientes for diferente de zero.

$$D = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 - k_3 & k_1 - k_3 \\ k_2 - k_1 & k_2 + k_3 & k_3 - k_1 \\ k_1 - k_2 & k_3 - k_2 & k_3 + k_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 + k_3 & k_1 + k_3 \\ 0 & 2k_3 & 2k_3 \\ 2k_1 & 0 & 2k_1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (1^\text{a} \text{ linha} + 2^\text{a} \text{ linha} + 3^\text{a} \text{ linha}) \\ \leftarrow (2^\text{a} \text{ linha} + 3^\text{a} \text{ linha}) \\ \leftarrow (1^\text{a} \text{ linha} + 3^\text{a} \text{ linha}) \end{array}$$

$$D = 4k_1k_3 \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 + k_3 & k_1 + k_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 8k_1k_2k_3$$

Então, $D \neq 0 \Leftrightarrow k_1 \neq 0, k_2 \neq 0 \text{ e } k_3 \neq 0$.

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.